



Д.А. Тихонов, А. А. Гильман

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ

Энгельс 2026 г.

**Энгельсский технологический институт (филиал)
федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего образования
«Саратовский государственный технический университет
имени Гагарина Ю. А.»**

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ

**Методические указания к решению задач
по «Сопротивлению материалов»
для студентов направлений**

**15.03.02 «Технологические машины и оборудование»
15.03.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностро-
ительных производств»
18.03.01 «Химическая технология»
23.03.01 «Нефтегазовое дело»
очной и заочной формы обучения**

УДК 539.3 / .8
ББК 30.121
Г47

Г47 Тихонов Д.А., Гильман А. А. Решение задач по сопротивлению материалов. Методические указания к решению задач. - Энгельс: Изд-во ЭТИ (филиал) СГТУ имени Гагарина Ю.А., 2023.- 41 с.

Рецензенты: к.ф.м.н., доцент кафедры «Естественные и математические науки» Энгельсского технологического института (филиал) Саратовского государственного технического университета имени Гагарина Ю. А. Серебряков А. В.
к.т.н., доцент кафедры «Оборудование и технологии обработки материалов» Энгельсского технологического института (филиал) Саратовского государственного технического университета имени Гагарина Ю. А. Козлов Г. А.

Учебное пособие содержит методические указания к решению задач по дисциплине «Сопротивление материалов» и разделу «Сопротивление материалов» в дисциплинах «Механика», «Прикладная механика», «Техническая механика» в соответствии с программой подготовки бакалавров. Рассматриваются задачи по темам: «Растяжение – сжатие», «Кручение», «Изгиб», «Сложное сопротивление», «Устойчивость», «Динамические нагрузки».

Для студентов бакалавриата всех направлений подготовки.

УДК 539.3 / .8
ББК 30.121

*Одобрено редакционно-издательским советом
ЭТИ (филиала) СГТУ имени Гагарина Ю.А.*

Брошюра издается в авторской редакции

РАСЧЕТ СТУПЕНЧАТОГО БРУСА НА РАСТЯЖЕНИЕ–СЖАТИЕ

Для ступенчатого стального бруса (рис. 1,а), выполненного из стали марки Ст. 3, имеющей предел текучести $\sigma_T = 240$ МПа, модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, требуется:

1. Построить по длине бруса эпюры продольных сил N , нормальных напряжений σ и перемещений поперечных сечений δ .
2. Вычислить коэффициент запаса прочности бруса n .

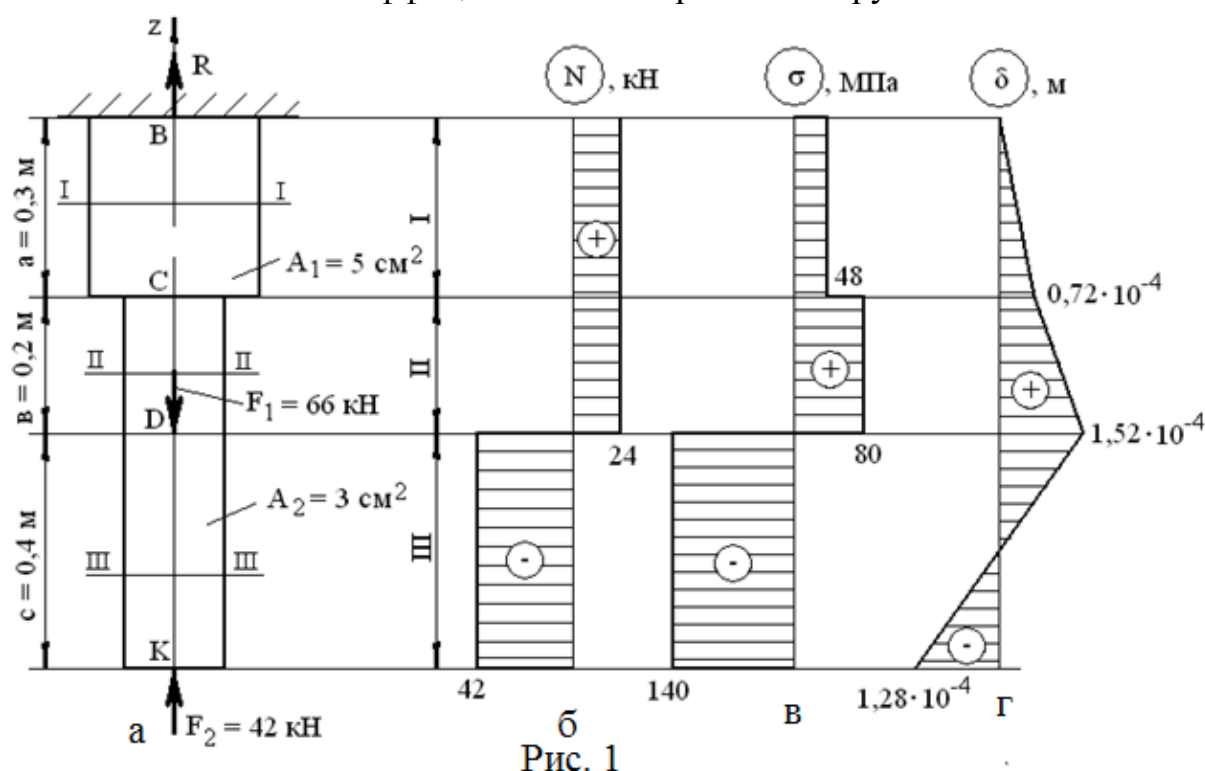


Рис. 1

Проведем ось z , совпадающую с осью бруса. Направление оси выбираем произвольно. Брус жестко зашпелен верхним концом в опоре, в которой возникает опорная реакция R . Направление вектора реакции выбираем произвольно. Величину опорной реакции найдем из уравнения равновесия статики:

$$\sum F_z = 0; \quad R - F_1 + F_2 = 0; \quad R = F_1 - F_2 = 66 - 42 = 24 \text{ кН.}$$

Разделим брус на силовые участки. Границами участков являются поперечные сечения бруса, проходящие через точки приложения внешних нагрузок и сечения, в которых изменяется площадь поперечного сечения бруса. Точки пересечения оси бруса и граничных сечений обозначим буквами В, С, D, К. Получим 3 участка бруса.

Используем метод сечений. На каждом участке, но не по его границам, проводим сечения I-I, II-II, III-III. При этом одну из частей бруса (бо-

лее сложную) мысленно отбрасываем и к плоскости сечения оставшейся части бруса прикладываем вектор продольной силы N в направлении внешней нормали к сечению. Рассматриваем равновесие оставшейся части бруса (рис. 2).

Уравнения равновесия статики на каждом участке запишутся:

на первом участке BC (рис. 2,а) $\sum F_z = 0$; $R - N_1 = 0$; $N_1 = R = 24 \text{ кН}$;

на втором участке CD (рис. 2,б) $\sum F_z = 0$; $R - N_2 = 0$; $N_2 = R = 24 \text{ кН}$;

на третьем участке DK (рис. 2,в) $\sum F_z = 0$; $N_3 + F_2 = 0$; $N_3 = -F_2 = -42 \text{ кН}$.

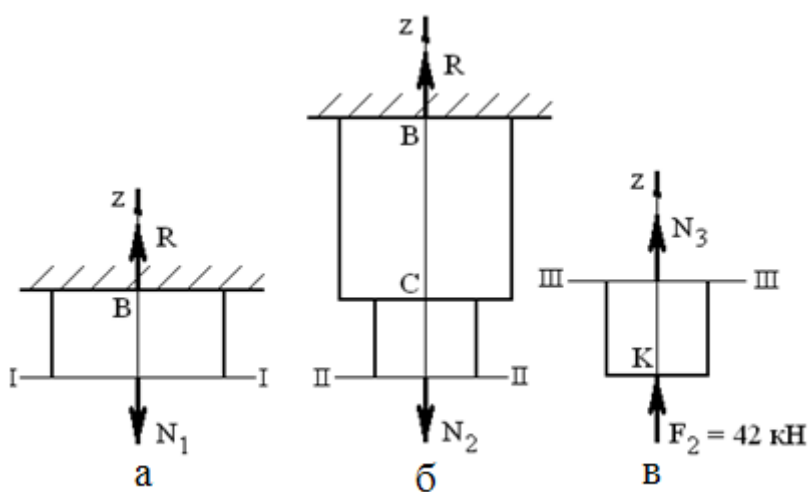


Рис. 2

Проведем линию (рис. 1,б), параллельную оси бруса y и отложим перпендикулярно ей в выбранном масштабе на каждом участке значения продольной силы, положительные, например, вправо, а отрицательные влево. Получим эпюру продольных сил N (рис. 1,б).

Определим нормальные напряжения σ , МПа, на каждом участке бруса

На первом участке BC

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{24 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^{-4}} = 4,8 \cdot 10^7 \text{ Па} = 48 \text{ МПа.}$$

На втором участке CD

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{24 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^{-4}} = 8 \cdot 10^7 \text{ Па} = 80 \text{ МПа.}$$

На третьем участке DK

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_2} = \frac{-42 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^{-4}} = -14 \cdot 10^7 \text{ Па} = -140 \text{ МПа.}$$

Здесь N - продольная сила на данном участке в Н;
 A - площадь поперечного сечения данного участка в м^2 .

По полученным значениям строим эпюру нормальных напряжений σ .

Найдем удлинения $\Delta \ell$, м, участков бруса
На первом участке BC

$$\Delta \ell_1 = \frac{N_1 \cdot a}{E \cdot A_1} = \frac{24 \cdot 10^3 \cdot 0,3}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 0,72 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

На втором участке CD

$$\Delta \ell_2 = \frac{N_2 \cdot b}{E \cdot A_2} = \frac{24 \cdot 10^3 \cdot 0,2}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 10^{-4}} = 0,8 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

На третьем участке DK

$$\Delta \ell_3 = \frac{N_3 \cdot c}{E \cdot A_2} = \frac{-42 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 10^{-4}} = -2,8 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Здесь ℓ - длина данного участка в м; E -модуль Юнга материала бруса в Па.

Определим *перемещения* сечений бруса, проходящих через границы участков.

Перемещение сечения, проходящего через точку В равно нулю, так как в жесткой заделке нет перемещений, т.е. $\delta_B = 0$.

Между точками В и С находится первый участок. Перемещение сечения С будет равно

$$\delta_C = \delta_B + \Delta \ell_1 = 0 + 0,72 \cdot 10^{-4} = 0,72 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Между точками С и D находится второй участок. Перемещение сечения D будет равно

$$\delta_D = \delta_C + \Delta \ell_2 = 0,72 \cdot 10^{-4} + 0,8 \cdot 10^{-4} = 1,52 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Между точками D и К находится третий участок. Перемещение сечения К будет равно

$$\delta_K = \delta_D + \Delta \ell_3 = 1,52 \cdot 10^{-4} - 2,8 \cdot 10^{-4} = -1,28 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

По полученным значениям строим эпюру перемещений сечений бруса δ (рис. 1,г).

Найдем коэффициент запаса прочности бруса по формуле

$$n = \frac{\sigma_T}{|\sigma_{\text{MAX}}|} = \frac{240}{140} = 1,71.$$

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ

Абсолютно жесткий брус OD (рис. 3,а) закреплен с помощью шарнирно–неподвижной опоры и двух стержней и нагружен силой Q. Требуется:

- 1) найти усилия и напряжения в стержнях, выразив их через силу Q;
- 2) из расчета по допускаемым напряжениям найти допускаемую нагрузку [Q], приравняв большее из напряжений в двух стержнях допускаемому напряжению $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$;
- 3) из расчета по допускаемым нагрузкам найти предельную грузоподъемность системы Q_T^k и допускаемую нагрузку $Q_{\text{доп}}$, если предел текучести $\sigma_T = 240 \text{ МПа}$ и запас прочности $n = 1,5$;
- 4) сравнить величины [Q] и $Q_{\text{доп}}$, полученные при расчете по допускаемым напряжениям и допускаемым нагрузкам.

Определим усилия и напряжения в стержнях. При действии силы Q в стержнях 1 и 2 будут возникать продольные силы N_1 и N_2 . Так как неизвестных четыре – две реакции шарнирно-неподвижной опоры O: вертикальная R и горизонтальная H, две продольные силы в стержнях - N_1 и N_2 (рис. 3,б), то они не могут быть определены из трех уравнений равновесия статики ($\sum X = 0$, $\sum Y = 0$, $\sum M = 0$). Поэтому заданная система является один раз статически неопределимой.

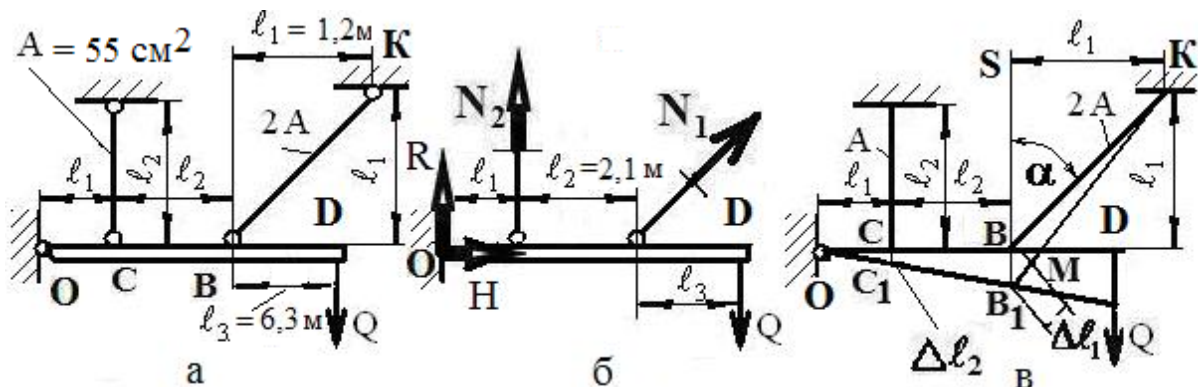


Рис. 3

Выразим N_1 и N_2 через заданную нагрузку Q. В два уравнения равновесия $\sum F_x = 0$ и $\sum F_y = 0$ входят ненужные для расчета конструкции реакции R и H. Используем третье уравнение равновесия статики

$$\sum M_O = N_1 \cos \alpha \cdot (\ell_1 + \ell_2) + N_2 \cdot \ell_1 - Q \cdot (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3) = 0. \quad (1)$$

Уравнение одно, а неизвестных два N_1 и N_2 .

Для составления дополнительного уравнения рассмотрим деформацию системы. Под действием нагрузки Q абсолютно жесткий брус OD , оставаясь прямым, повернется вокруг шарнира O (рис. 3,в). Точки B и C опишут дуги, которые вследствие малости угла $\angle C_1OC$ заменим перпендикулярами BB_1 и CC_1 к оси жесткого бруса OD .

Величина $\Delta \ell_2 = BB_1$ представляет собой удлинение второго стержня. Удлинение первого стержня $\Delta \ell_1$ найдем, опустив перпендикуляр BM из точки B на B_1K . Вследствие малости деформации считаем, что $\angle SB_1K \approx \angle SBK = \alpha$. Из прямоугольного треугольника BB_1M найдем $\Delta \ell_1 = MB_1 = BB_1 \cdot \cos \alpha$, или $BB_1 = MB_1 / \cos \alpha = \Delta \ell_1 / \cos \alpha$.

Свяжем $\Delta \ell_1$ и $\Delta \ell_2$. Из подобия треугольников $\triangle OCC_1$ и $\triangle OBB_1$ следует, что

$$\frac{CC_1}{BB_1} = \frac{OC}{OB} = \frac{\ell_1}{\ell_1 + \ell_2} = \frac{1,2}{1,2 + 2,1} = 0,36, \text{ откуда } CC_1 = 0,36 \cdot BB_1$$

Так как $BB_1 = \Delta \ell_1 / \cos \alpha$, $CC_1 = \Delta \ell_2$, то $\Delta \ell_2 = 0,36 \Delta \ell_1 / \cos \alpha$. (2)

Это и есть дополнительное уравнение перемещений.

Используем закон Гука $\Delta \ell = \frac{N \cdot \ell}{E \cdot A}$.

Так как из $\triangle SBK$ видно, что $\frac{\ell_1}{\cos \alpha}$ - длина стержня 1 и дано, что $A_1 = 2A$ - площадь стержня 1, ℓ_2 - длина стержня 2 и $A_2 = A$ - площадь стержня 2, то абсолютные удлинения стержней будут равны

$$\Delta \ell_1 = \frac{N_1 \cdot \ell_1}{E \cdot 2 \cdot A \cos \alpha} \quad \text{и} \quad \Delta \ell_2 = \frac{N_2 \cdot \ell_2}{E \cdot A}.$$

Подставим $\Delta \ell_1$ и $\Delta \ell_2$ в уравнение (2)

$$\frac{N_2 \ell_2}{E \cdot A} = \frac{N_1 \cdot \ell_1}{E \cdot 2 \cdot A \cos^2 \alpha} 0,36.$$

Сократим правую и левую части этого выражения на жесткость при растяжении-сжатии - EA , подставим заданные численные значения ℓ_1 , ℓ_2 и $\alpha = 45^\circ$ (см. рис.3,в), т.е. $\cos^2 \alpha = 0,5$.

Получим $N_2 = 0,208 \cdot N_1$.

Подставляем $N_2 = 0,208 \cdot N_1$ в уравнение (1). Находим

$$N_1 = 3,717 \cdot Q, \quad N_2 = 0,208 \cdot N_1 = 0,208 \cdot 3,717 \cdot Q = 0,772 \cdot Q.$$

Из условия задачи $A=55 \text{ см}^2$.

Тогда нормальные напряжения σ_1 и σ_2 в стержнях будут равны

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{N_1}{2A} = 337,9 \cdot Q \text{ Па}, \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{N_2}{A} = 140,4 \cdot Q \text{ Па}.$$

Определим допускаемую силу $[Q]$ из расчета по допускаемым напряжениям. Так как напряжение в первом стержне больше, чем во втором, то первый стержень более опасен. Приравняем напряжение в первом стержне и допускаемое напряжение $[\sigma]=160 \text{ МПа}$.

$\sigma_1 = [\sigma]$. Получим $337,9 \cdot [Q] = 160 \cdot 10^6$. Откуда $[Q] = 473,45 \text{ кН}$.

Определим допускаемую силу $Q_{\text{доп}}$ из расчета по допускаемым нагрузкам, при которых материал всех стержней течет. При текучести напряжения в стержнях равны $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_T = 240 \text{ МПа}$ – пределу текучести материала. Тогда усилия в стержнях будут:

$$N_1^T = \sigma_T \cdot A_1 = \sigma_T \cdot 2A, \quad N_2^T = \sigma_T \cdot A_2 = \sigma_T \cdot A.$$

Подставляем эти выражения в уравнение равновесия статики (1) для состояния текучести стержней системы

$$N_1^T \cos \alpha (\ell_1 + \ell_2) + N_2^T \ell_1 = Q_T^K (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3);$$

$$240 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 55 \cdot 10^{-4} \cos \alpha (1,2 + 2,1) + 240 \cdot 10^6 \cdot 55 \cdot 10^{-4} \cdot 1,2 = (1,2 + 2,1 + 6,3) \cdot Q_T^K.$$

Откуда находим предельную грузоподъемность системы $Q_T^K = 806,6 \text{ кН}$.

Определим допускаемую нагрузку $Q_{\text{доп}} = \frac{Q_T^K}{n} = \frac{Q_T^K}{1,5} = 537,74 \text{ кН}$,

где $n = 1,5$ – заданный коэффициент запаса прочности.

Сравнивая полученные результаты, видим, что допускаемая нагрузка $Q_{\text{доп}}$, определенная из расчета по допускаемым нагрузкам, больше допускаемой нагрузки $[Q]$, определенной из расчета по допускаемым напряжениям в $\frac{Q_{\text{доп}}}{[Q]} = 1,1$ раза.

Способ расчета по допускаемым нагрузкам для статически неопределимых систем позволяет вскрыть дополнительные резервы прочности, повысить несущую способность системы и указывает на возможность более экономного расходования материала.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

Рассмотрим пример на определение геометрических характеристик плоского сечения (рис. 6). Требуется:

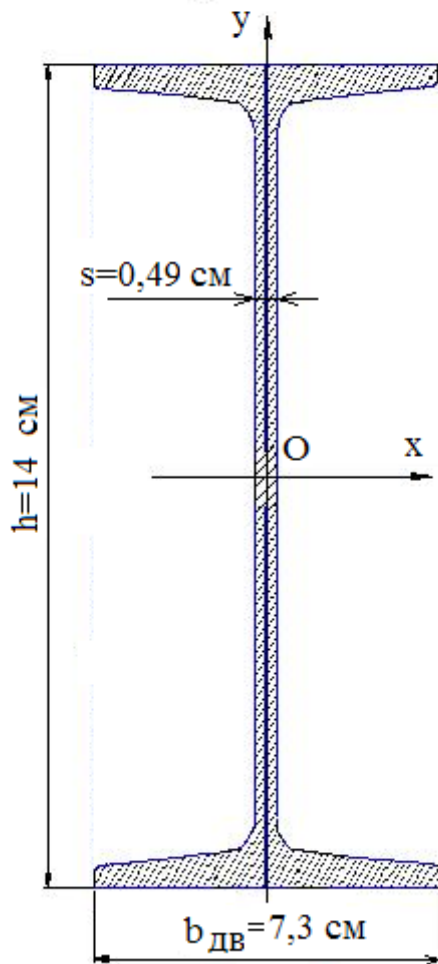
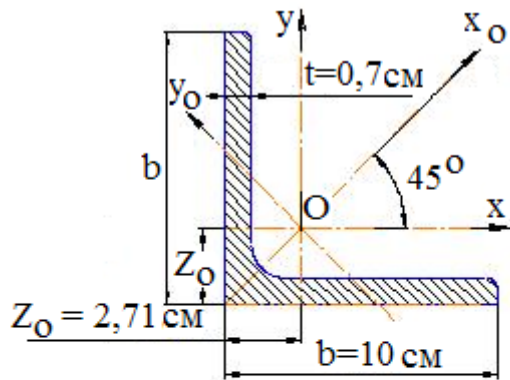


Рис. 4

- 1) определить положение центра тяжести поперечного сечения;
- 2) найти осевые и центробежный моменты инерции относительно центральных осей x_c и y_c ;
- 3) определить положение главных центральных осей u и v ;
- 4) найти моменты инерции относительно главных центральных осей;
- 5) вычертить сечение в масштабе и указать на нем все оси.

Выпишем из таблиц сортамента все данные, необходимые для расчёта, и зарисуем профили элементов сечения (рис. 4).

Двутавр № 14 по ГОСТ 8238-89. Площадь $A = 17,4 \text{ см}^2$. Моменты инерции относительно собственных центральных осей: $J_x = 572 \text{ см}^4$, $J_y = 41,9 \text{ см}^4$. Так как центральные оси являются осями симметрии, то это главные оси и центробежный момент относительно них равен нулю, $J_{xy}=0$.

Уголок равнополочный 100х100х7 по ГОСТ 8509-86. Площадь $A = 13,75 \text{ см}^2$. Моменты инерции $J_x = J_y = 130,59 \text{ см}^4$, $J_{x_0} = 207,01 \text{ см}^4$, $J_{y_0} = 54,16 \text{ см}^4$. Расстояние от центра тяжести уголка до наружных граней полков $Z_0 = 2,71 \text{ см}$. Угол между осями x и x_0 равен 45° . Центробежный момент инерции уголка J_{xy} находится по формуле

$$J_{xy} = \frac{J_{x_0} - J_{y_0}}{2} \sin 2\alpha = \frac{207,01 - 54,16}{2} \sin(2 \cdot 45^\circ) = -76,43 \text{ см}^4$$

Так как для равноположного уголка $\alpha = 45^\circ$, то $\sin 2\alpha = \sin 90^\circ = 1$. Знак центробежного момента инерции уголка выбирается в соответствии с рис. 5.

Прежде чем приступить к дальнейшему расчёту, необходимо с соблюдением масштаба начертить сечение (рис. 6). Так как сечение состоит из двух элементов I и II, необходимо ввести соответствующие индексы в обозначении центров тяжестей (O_1, O_2), центральных осей x_1, y_1, x_2, y_2 и соответствующих моментов инерции.

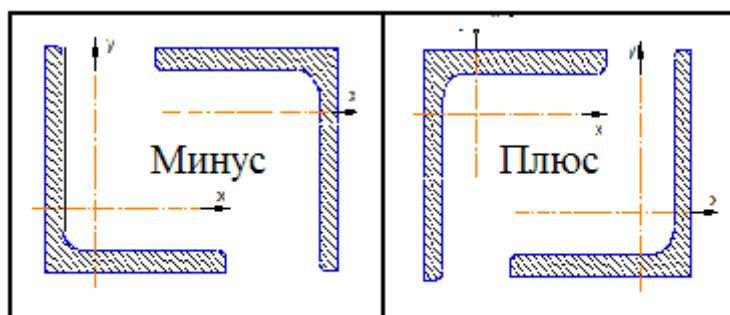


Рис. 5

Определим координаты центра тяжести сечения относительно вспомогательных осей x и y . Оси удобно провести через центр тяжести одной из фигур, например, двутавра. Тогда координаты центров тяжести элементов в си-

стеме осей x и y будут равны $O_1(0;0)$,

$O_2(-b_{дв}/2 + Z_0 = -7,3/2 + 2,71 = -0,94$ см; $h/2 + Z_0 = 7 + 2,71 = 9,71$ см).

Координаты центра тяжести сечения находятся по следующим формулам:

$$X_C = \frac{S_y}{A} = \frac{A_1 \cdot x_{o1} + A_2 \cdot x_{o2}}{A_1 + A_2} = \frac{17,4 \cdot 0 + 13,57 \cdot (-0,94)}{17,4 + 13,57} = -0,415 \text{ см.}$$

$$Y_C = \frac{S_x}{A} = \frac{A_1 \cdot y_{o1} + A_2 \cdot y_{o2}}{A_1 + A_2} = \frac{17,4 \cdot 0 + 13,57 \cdot 9,71}{17,4 + 13,75} = 4,286 \text{ см.}$$

В масштабе на рисунок 6 наносим точку C с координатами $x_c = -0,415$ см и $y_c = 4,286$ см и проводим через т. C оси x_c и y_c , параллельные осям x и y .

Пользуясь формулами связи между координатами точки относительно параллельных осей координат, находим координаты центров тяжестей O_1 и O_2 двутавра и уголка в полученной системе координат $x_c y_{c.}$:

$$X_{co_1} = -X_C = 0,415 \text{ см; } Y_{co_1} = -Y_C = -4,286 \text{ см;}$$

$$X_{co_2} = (-0,94) - X_C = -0,525 \text{ см; } Y_{co_2} = 9,71 - Y_C = 5,424 \text{ см.}$$

Для проверки правильности нахождения координат центра тяжести сечения найдём статистические моменты всего сечения относительно центральных осей x_c и $y_{c.}$:

$$S_{x_c} = A_1 \cdot Y_{co_1} + A_2 \cdot Y_{co_2} = 17,4 \cdot (-4,286) + 13,75 \cdot 5,424 = 0,0036 \text{ см}^3;$$

$$S_{y_c} = A_1 \cdot X_{co_1} + A_2 \cdot X_{co_2} = 17,4 \cdot 0,415 + 13,75 \cdot (-0,525) = -0,00225 \text{ см}^3.$$

Так как статические моменты сечения относительно центральных осей должны быть равны нулю, то близкие к нулю значения S_{x_c} и S_{y_c} пока-

зывают, что координаты центра тяжести сечения найдены правильно. Отличие их от нуля – накопленная погрешность вычисления.

Определим осевые и центробежный моменты инерции сечения относительно произвольных центральных осей $x_c y_c$. Используем формулы зависимостей между моментами инерции относительно параллельных осей:

$$J_{x_c} = J_{x_c}^I + J_{x_c}^{II} = (J_{x_1}^I + A_1 Y_{CO_1}^2) + (J_{x_2}^{II} + A_2 Y_{CO_2}^2) =$$

$$= 572 + 14,7 \cdot (-4,286)^2 + 130,59 + 13,75 \cdot (5,424)^2 = 1426,7 \text{ см}^4.$$

$$J_{y_c} = J_{y_c}^I + J_{y_c}^{II} = (J_{y_1}^I + A_1 X_{CO_1}^2) + (J_{y_2}^{II} + A_2 X_{CO_2}^2) =$$

$$= 41,9 + 14,7 \cdot (0,415)^2 + 13,75 \cdot (-0,525)^2 = 179,3 \text{ см}^4.$$

$$J_{x_c y_c} = J_{x_c y_c}^I + J_{x_c y_c}^{II} = (J_{x_1 y_1}^I + A_1 X_{CO_1} \cdot Y_{CO_1}) + (J_{x_2 y_2}^{II} + A_2 X_{CO_2} \cdot Y_{CO_2}) =$$

$$= 0 + 14,7 \cdot (0,415) \cdot (-4,286) - 13,75 \cdot (-0,525) \cdot (5,424) = -146,5 \text{ см}^4.$$

Определим направление главных центральных осей u и v . Тангенс угла наклона главных центральных осей u и v к произвольным центральным осям x_c и y_c определяется по формуле

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot J_{x_c y_c}}{J_{y_c} - J_{x_c}} = \frac{2 \cdot (-146,5)}{179,3 - 1426,7} = \frac{-293}{-1247,4} = 0,235.$$

По найденному значению тангенса с помощью таблиц или калькулятора находим значение угла $2\alpha = 13,22^\circ$, откуда $\alpha = 6,61^\circ$. Положительный угол α откладываем от оси x_c против хода часовой стрелки и определяем положение одной из главных центральных осей. Вторая главная центральная ось проводится через центр тяжести сечения $T.C$ перпендикулярно первой оси. Проведем на рисунке 6 главные центральные оси u и v .

Для проверки правильности определения положения главных центральных осей найдём центробежный момент инерции относительно этих осей u и v по формуле

$$J_{uv} = \frac{J_{x_c} - J_{y_c}}{2} \cdot \sin 2\alpha + J_{x_c y_c} \cdot \cos 2\alpha =$$

$$\frac{1426,7 - 179,3}{2} \cdot \sin 13,22^\circ - 146,5 \cdot \cos 13,22^\circ = 0,04 \text{ см}^4.$$

Центробежный момент инерции относительно главных осей должен быть равным нулю. Полученная близкая к нулю величина J_{uv} показывает, что положение главных осей определено достаточно точно.

Определим моменты инерции относительно главных осей. Величины главных моментов инерции находятся по формуле:

$$J_{\frac{\max}{\min}} = \frac{J_{x_c} + J_{y_c}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_{x_c} - J_{y_c}}{2}\right)^2 + J_{x_c y_c}^2} = \frac{1426,7 + 179,3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1426,7 - 179,3}{2}\right)^2 + (-146,5)^2} =$$

$$= 803 \pm 640,675.$$

Главная центральная ось, относительно которой момент инерции будет максимальным ($J_{\max}$), составляет меньший угол с той из произвольных центральных осей, момент инерции относительно которой имеет большее значение. В данном случае - это ось u .

Таким образом, получаем:

$$J_{\max} = J_U = 1443,7 \text{ см}^4; \quad J_{\min} = J_V = 162,3 \text{ см}^4.$$

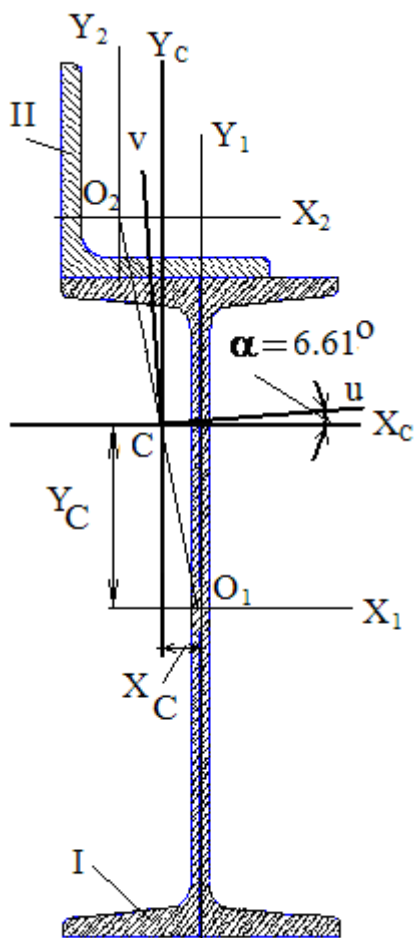


Рис. 6

Для контроля определения J_V и J_U проверим, выполняется ли равенство:

$$J_{x_c} + J_{y_c} = J_V + J_U;$$

$$J_{x_c} + J_{y_c} = 1426.7 + 179.3 = 1606 \text{ см}^4;$$

$$J_V + J_U = 1443.4 + 162.3 = 1606 \text{ см}^4. \text{ см}^4.$$

С той же целью найдём центробежный момент инерции $J_{x_c y_c}$ по известным главным центральным моментам инерции J_V и J_U и углу α по формуле

$$J_{x_c y_c} = \frac{J_V - J_U}{2} \cdot \sin 2\alpha =$$

$$= \frac{1443,4 - 162,3}{2} \cdot \sin 13.22^\circ = 146.51 \text{ см}^4$$

Незначительное отличие от ранее найденного значения $J_{x_c y_c} = 146.5 \text{ см}^4$ свидетельствует о достаточной точности определения положения главных центральных осей и

величин главных центральных моментов инерции.

РАСЧЕТ ВАЛА НА КРУЧЕНИЕ

Стальной вал, ($G = 0,8 \cdot 10^5$ МПа), закручивается двумя моментами $m_1 = 11$ кНм и $m_2 = 6$ кНм (рис. 7а). Два участка вала сплошные - имеют форму поперечного сечения в виде кругов диаметрами d_1 и d_2 , а третий участок вала полый - имеют форму поперечного сечения в виде кольца с отношением внутреннего диаметра d к наружному D , равным $d/D = 0,45$.

1. Построить эпюру крутящих моментов M_K .

2. Из условия прочности по допускаемым касательным напряжениям $[\tau] = 80$ МПа определить размеры поперечных сечений участков вала и округлить их до ближайшей большей величины в мм;

3. Построить эпюру углов поворота сечений вала α ;

Принять: $a = 0,1 \ell_3 = 0,63$ м.

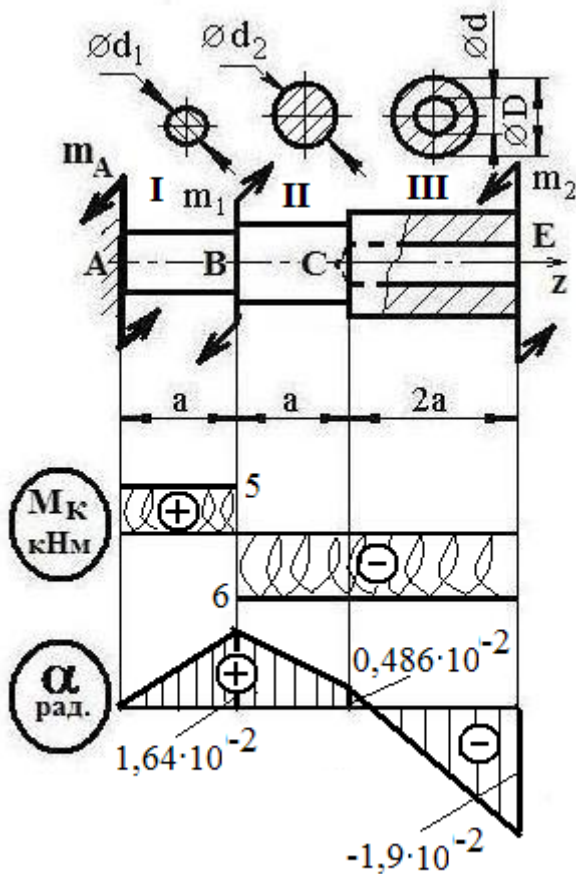


Рис. 7

Обозначим и найдем реактивный момент m_A , возникающий в опоре А.

Ось вала обозначим через z .

Из уравнения равновесия статики:

$$\sum M_z = 0; \quad m_A - m_1 + m_2 = 0;$$

$$m_A = m_1 - m_2 = 5 \text{ кНм.}$$

Разделим вал на три участка I, II и III, и используем метод сечений.

Найдем крутящие моменты на участках вала:

на участке АВ $M_{K1} = m_A = 5$ кНм;

на участке ВС $M_{K2} = m_A - m_1 = -6$ кНм;

на участке СЕ $M_{K3} = -m_2 = -6$ кНм.

Построим эпюру крутящих моментов M_K .

Следует иметь в виду, что в сечении, в котором к валу приложен внешний закручивающий момент, ордината эпюры изменяется скачкообразно на величину, равную значе-

нию этого момента.

Определим размеры поперечных сечений вала из расчета на проч-

ность. Условие прочности при кручении имеет вид $\frac{|M_{K \max}|}{W_p} \leq [\tau],$

где M_{Kmax} – максимальный крутящий момент в Нм; W_p – полярный момент сопротивления поперечного сечения в $м^3$; $[\tau]$ – допускаемое касательное напряжение в Па.

Изобразим поперечные сечения участков вала с размерами. Для определения размеров поперечных сечений вала используется формула $W_p \geq \frac{|M_{Kmax}|}{[\tau]}$, полученная из условия прочности.

На участке АВ требуемый полярный момент сопротивления поперечного сечения:

$$W_{p1}^{TP} \geq \frac{|M_{K1}|}{[\tau]} = \frac{5 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^6} = 62,5 \cdot 10^{-6} м^3 = 62,5 см^3.$$

Так как на первом участке АВ вал имеет круглое поперечное сечение, то $W_{p1} = \pi \cdot d_1^3 / 16 \approx 0,2 \cdot d_1^3$.

Приравниваем это выражение требуемому полярному моменту сопротивления W_{p1}^{TP} .

$$0,2 \cdot d_1^3 = 62,5 см^3$$

Откуда $d_1 = \sqrt[3]{\frac{62,5}{0,2}} = 6,79 см$. Округляем до значения $d_1 = 70 мм$.

На участке ВС требуемый полярный момент сопротивления поперечного сечения:

$$W_{p2}^{TP} \geq \frac{|M_{K2}|}{[\tau]} = \frac{6 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^6} = 75 \cdot 10^{-6} м^3 = 75 см^3.$$

Так как на втором участке ВС вал имеет круглое поперечное сечение, то $W_{p2} = \pi \cdot d_2^3 / 16 \approx 0,2 \cdot d_2^3$.

Приравниваем это выражение требуемому полярному моменту сопротивления W_{p2}^{TP} .

$$0,2 \cdot d_2^3 = 75 см^3$$

Откуда $d_2 = \sqrt[3]{\frac{75}{0,2}} = 7,21 см$. Округляем до значения $d_2 = 80 мм$.

На участке СЕ требуемый полярный момент сопротивления поперечного сечения:

$$W_{p3}^{TP} \geq \frac{|M_{K3}|}{[\tau]} = \frac{6 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^6} = 75 \cdot 10^{-6} м^3 = 75 см^3$$

Так как на третьем участке СЕ вал имеет кольцевое поперечное сечение, то $W_{p3} = \pi \cdot D^3 \cdot (1 - d^4 / D^4) / 16$

$$W_{p3} = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \frac{d^4}{D^4}) \approx 0,2 D^3 (1 - (\frac{d}{D})^4) = 0,2 \cdot D^3 (1 - 0,45^4) = 0,192 D^3.$$

Приравниваем это выражение требуемому полярному моменту сопротивления W_{P3}^{TP} .

$$0,192 D^3 = 75 \text{ см}^3$$

Откуда $D = 7,31 \text{ см}$. Округляем до значения $D = 80 \text{ мм}$.

Так как $d/D = 0,45$, то $d = 0,45 \cdot D = 36 \text{ мм}$.

Для построения эпюры углов поворота сечений вала α найдем углы закручивания участков вала по формуле $\varphi = \frac{M_k \cdot \ell}{G \cdot J_p}$,

где M_k – крутящий момент на рассматриваемом участке в Нм; ℓ – длина участка вала в м; G – модуль сдвига материала в Па; J_p – полярный момент инерции поперечного сечения вала на рассматриваемом участке в м^4 .

Вначале найдем жесткости на кручение GJ_p участков вала.

На участке АВ

$$GJ_{p1} = G \cdot 0,1 \cdot d_1^4 = 0,8 \cdot 10^{11} \cdot 0,1 \cdot (70 \cdot 10^{-3})^4 = 192,1 \cdot 10^3 \text{ Нм}^2.$$

На участке ВС

$$GJ_{p2} = G \cdot 0,1 \cdot d_2^4 = 0,8 \cdot 10^{11} \cdot 0,1 \cdot (80 \cdot 10^{-3})^4 = 327,7 \cdot 10^3 \text{ Нм}^2.$$

На участке СЕ

$$GJ_{p3} = G \cdot 0,1 D^4 (1 - (\frac{d}{D})^4) = 0,8 \cdot 10^{11} (80 \cdot 10^{-3})^4 \cdot (1 - (0,45)^4) = 314,2 \cdot 10^3 \text{ Нм}^2.$$

Тогда

$$\varphi_1 = \frac{M_{k1} \cdot a}{G \cdot J_{p1}} = \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 0,63}{192,1 \cdot 10^3} = 1,64 \cdot 10^{-2} \text{ рад.}$$

$$\varphi_2 = \frac{M_{k1} \cdot a}{G \cdot J_{p1}} = -\frac{6 \cdot 10^3 \cdot 0,63}{327,7 \cdot 10^3} = -1,15 \cdot 10^{-2} \text{ рад.}$$

$$\varphi_3 = \frac{M_{k3} \cdot 2a}{G \cdot J_{p3}} = -\frac{6 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 0,63}{314,2 \cdot 10^3} = -2,4 \cdot 10^{-2} \text{ рад.}$$

Определим углы поворота сечений вала. В опоре $\alpha_A = 0$.

$$\alpha_B = \alpha_A + \varphi_1 = 0 + (1,64) \cdot 10^{-2} = 1,64 \cdot 10^{-2} \text{ рад.}$$

$$\alpha_C = \alpha_B + \varphi_2 = 1,64 \cdot 10^{-2} + (-1,15) \cdot 10^{-2} = 0,486 \cdot 10^{-2} \text{ рад.}$$

$$\alpha_E = \alpha_C + \varphi_3 = 0,486 \cdot 10^{-2} + (-2,4) \cdot 10^{-2} = -1,9 \cdot 10^{-2} \text{ рад.}$$

Строим эпюру углов поворота сечений вала α .

РАСЧЕТ ШАРНИРНО-ОПЕРТОЙ БАЛКИ НА ИЗГИБ

Для стальной балки, изображенной на рис. 8, требуется:

1. Построить эпюры поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_x .
2. Подобрать из условия прочности по допускаемым напряжениям поперечные сечения в виде круга, квадрата, двутавра и двух швеллеров. Стенки двутавра и двух швеллеров параллельны действующей нагрузке.
3. Сравнить принятые сечения балок по экономичности.

Принять: $F = F_1$, $m = m_1$, $[\sigma] = 160$ МПа.

Расчет проведен для: $\ell_1 = 1,2$ м, $\ell_2 = 2,1$ м, $\ell_3 = 6,3$ м,

$F = F_1 = 40$ кН, $m = m_1 = 11$ кНм, $q = 6$ кН/м.

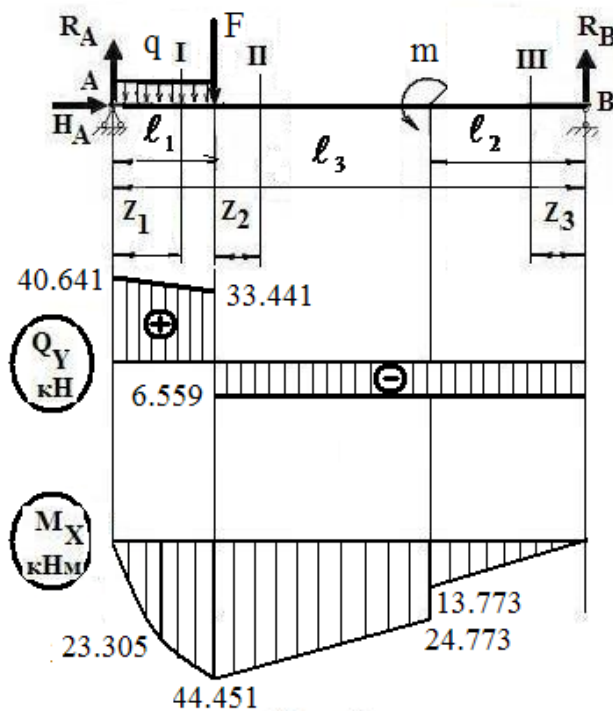


Рис. 8

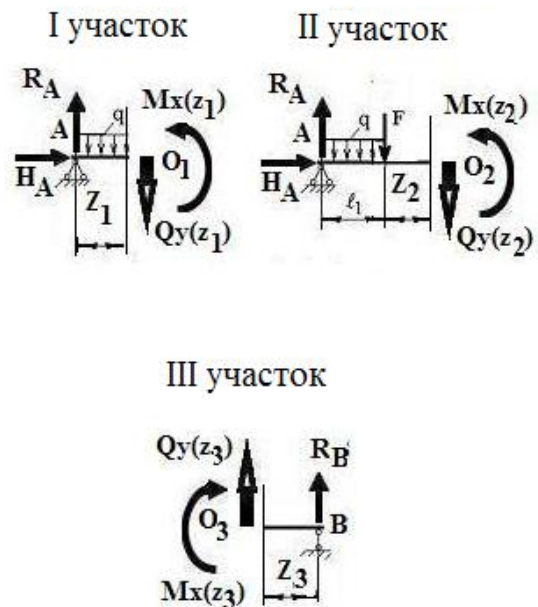


Рис. 9

Определим опорные реакции. В шарнирно-неподвижной опоре А возникают две составляющих реакции – вертикальная R_A и горизонтальная H_A . В шарнирно-подвижной опоре В – одна вертикальная реакция R_B . Для определения трёх неизвестных реакций имеем три уравнения равновесия:

$$\sum F_z = 0; H_A = 0.$$

$$\sum m_A = 0; -q\ell_1\ell_1/2 - F\ell_1 + m + R_B\ell_3 = 0.$$

$$\text{Откуда} \quad R_B = \frac{q \cdot \frac{\ell_1^2}{2} + F \cdot \ell_1 - m}{\ell_3} = \frac{6 \cdot \frac{1,2^2}{2} + 40 \cdot 1,2 - 11}{6,3} = 6,559 \text{ кН}$$

$$\sum m_B = 0; \quad -R_A \ell_3 + q \ell_1 (\ell_3 - \ell_1/2) + F(\ell_3 - \ell_1) + m = 0.$$

Откуда

$$R_A = \frac{q \cdot \ell_1 \cdot \left(\ell_3 - \frac{\ell_1}{2} \right) + F \cdot (\ell_3 - \ell_1) + m}{\ell_3} = \frac{6 \cdot 1,2 \cdot (6,3 - \frac{1,2}{2}) + 40 \cdot (6,3 - 1,2) + 11}{6,3} = 40,641 \text{ кН}$$

Для проверки правильности нахождения реакций используем уравнение:

$$\sum F_y = 0. \quad R_A - q \ell_1 + R_B - F = 0,005$$

Опорные реакции найдены правильно.

Разбиваем конструкцию балки на участки I, II, III и используем метод сечений.

Найдем значения поперечных сил $Q_Y(z)$ и изгибающих моментов $M_X(z)$ на участках балки и построим их эпюры.

Участок I (рис. 9): $0 \leq z_1 \leq \ell_1 = 1,2 \text{ м}$.

Проводим сечение 1-1 в пределах участка I на расстоянии z_1 от точки A (рис. 8). Сечение проводится в произвольном месте участка I, но только не по его граничным точкам. Координата z_1 при этом изменяется от 0 до ℓ_1 , то есть. Отбросим правую часть балки и рассмотрим равновесие левой – более простой части балки.

$$\sum F_y = 0. \quad R_A - Q_Y(z_1) - qz_1 = 0, \quad \text{откуда} \quad Q_Y(z_1) = R_A - qz_1.$$

Это линейная функция, то есть зависимость Q_y от z_1 описывается прямой линией – такой вид будет иметь эпюра Q_y на участке I. Для построения прямой достаточно найти её значение в двух точках, например, при $z_1 = 0$ и при $z_1 = \ell_1$, то есть на границах участка

$$Q_Y(0) = R_A = 40,641 \text{ кН}. \quad Q_Y(\ell_1) = R_A - q\ell_1 = 40,641 - 6 \cdot 1,2 = 33,441 \text{ кН}.$$

По полученным значениям строим эпюру Q_Y на участке I (рис. 8).

$$\sum m_{O_1} = 0 \quad -R_A z_1 + qz_1 0,5z_1 + M_X(z_1) = 0, \quad \text{откуда} \quad M_X(z_1) = R_A z_1 - 0,5qz_1^2.$$

Это парабола, для построения которой необходимо иметь, как минимум, значения функции $M_X(z_1)$ в трёх точках (в двух граничных точках участка и в какой-либо третьей точке). Так как эпюра Q_y на рассматриваемом участке не пересекает ось, то есть эпюра M_X не имеет экстремума на этом участке, то в качестве третьей точки принимается любая точка участка, обычно середина.

$$M_X(0) = 0. \quad M_X(\ell_1 = 1,2) = 40,641 \cdot 1,2 - 0,5 \cdot 6 \cdot 1,2^2 = 44,451 \text{ кНм}.$$

$$M_X(\ell_1/2 = 0,6) = 40,641 \cdot 0,6 - 0,5 \cdot 6 \cdot 0,6^2 = 23,305 \text{ кНм}$$

По найденным значениям $M_x(z_1)$ в трёх точках строим эпюру M_x на участке I (см. рис. 8).

Проводим сечение в пределах участка II (см. рис. 8), совместив начало отсчета с началом участка II.

Участок II (см. рис. 9): $0 \leq z_2 \leq \ell_3 - \ell_1 - \ell_2 = 3$ м.

$$\sum F_y = 0 \quad R_A - q\ell_1 - F - Q_Y(z_2) = 0, \quad \text{откуда} \quad Q_Y(z_2) = R_A - q\ell_1 - F = -6,559 \text{ кН.}$$

Строим эпюру Q_Y на участке II.

$$\sum m_{O_2} = 0 \quad q\ell_1(0,5\ell_1 + z_2) - R_A(\ell_1 + z_2) + Fz_2 + M_X(z_2) = 0,$$

$$\text{откуда} \quad M_X(z_2) = -q\ell_1(0,5\ell_1 + z_2) + R_A(\ell_1 + z_2) - Fz_2.$$

Зависимость $M_x(z_2)$ линейная, и для построения эпюры M_x на втором участке находим две точки:

$$M_X(0) = 44,45 \text{ кНм.} \quad M_X(3) = -6 \cdot 1,2(0,5 \cdot 1,2 + 3) + 40,641(1,2 + 3) - 40 \cdot 3 = 24,773 \text{ кНм.}$$

Строим эпюру M_x на участке II.

Участок III проще рассматривать справа, отбрасывая левую часть балки (см. рис. 9).

Участок III $0 \leq z_3 \leq \ell_2 = 2,1$ м

$$\sum F_y = 0. \quad Q_Y(z_3) + R_B = 0, \quad \text{откуда} \quad Q_Y(z_3) = -R_B = -6,559 \text{ кН.}$$

Строим эпюру Q_Y на участке III.

$$\sum m_{O_3} = 0 \quad R_B z_3 - M_X(z_3) = 0, \quad \text{откуда} \quad M_X(z_4) = R_B z_3.$$

Зависимость $M_x(z_3)$ линейная, поэтому эпюру M_x на участке III представляем прямой линией, проведенной через две точки (см. рис. 8).

$$M_X(0) = 0. \quad M_X(\ell_2) = 13,773 \text{ кНм.}$$

Строим эпюру M_x на участке III.

Подберем поперечные сечения балки в виде круга, квадрата, двутавра и двух швеллеров. Поперечные сечения балки подбираются из условия прочности по нормальным напряжениям, которое имеет следующий вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{W_x} \leq [\sigma],$$

где $M_{\max}$ — максимальный изгибающий момент в Нм (по эпюре M_x находим, что $|M_{x\max}| = 44,451 \text{ кНм} = 44451 \text{ Нм}$); W_x — осевой момент сопротивления поперечного сечения в м^3 ; $[\sigma]$ — допускаемое нормальное напряжение в Па ($[\sigma] = 160 \text{ МПа} = 160 \cdot 10^6 \text{ Па}$).

Из этого соотношения можно найти требуемый осевой момент сопротивления сечения равен $W_x^{TP} = \frac{|M_{x_{max}}|}{[\sigma]} = \frac{44451}{160 \cdot 10^6} = 277,8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 277,8 \text{ см}^3$.

Подберём круглое поперечное сечение.

Осевой момент сопротивления круга $W_x = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1 \cdot d^3$.

Откуда диаметр поперечного сечения балки $d = \sqrt[3]{\frac{W_x^{TP}}{0,1}} = \sqrt[3]{\frac{277,8}{0,1}} = 14,058 \text{ см}$.

Площадь круга $A_{кр} = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = 155,1 \text{ см}^2$.

Подберём квадратное поперечное сечение.

Осевой момент сопротивления квадрата $W_x = \frac{b^3}{6}$.

Откуда сторона квадрата поперечного сечения балки

$b = \sqrt[3]{6 \cdot W_x^{TP}} = \sqrt[3]{277,8} = 11,86 \text{ см}$. Площадь квадрата $A_{КВ} = b^2 = 140,6 \text{ см}^2$.

Подберём двутавровое поперечное сечение балки.

По сортаменту (ГОСТ 8239-89) выбираем двутавр № 22 с осевым моментом сопротивления $W_x = 232 \text{ см}^3$ меньшим, чем требуемый.

Проверяем осевой момент сопротивления принятого сечения на процент расхождения с требуемым осевым моментом сопротивления

$$\frac{|W_x^{TP} - W_x^{ДВ}|}{W_x^{TP}} 100\% = \frac{277,8 - 232}{277,8} 100\% = 16,48 \%$$

Полученный процент расхождения 16,48 % больше допускаемого 5%, следовательно, двутавр № 22 не подходит.

Принимаем двутавр № 24 с осевым моментом сопротивления $W_x = 289 \text{ см}^3$ и площадью поперечного сечения $A_{дв} = 34,8 \text{ см}^2$. Этот двутавр на процент расхождения не проверяем.

Подберём поперечное сечение балки, состоящее из двух швеллеров. Требуемый момент сопротивления одного швеллера $W^{ШВ} = 0,5 W^{TP} = 0,5 \cdot 277,8 = 138,9 \text{ см}^3$.

По сортаменту (ГОСТ 8240-97) выбираем швеллер № 18а с осевым моментом сопротивления $W_x = 132 \text{ см}^3$. Проверяем принятое сечение на процент расхождения с требуемым осевым моментом сопротивления

$$\frac{|W_x^{TP} - W_x^{ШВ}|}{W_x^{TP}} 100\% = \frac{138,9 - 132}{138,9} 100\% = 4,9 \%$$

Полученный процент расхождения 4,9% меньше допускаемого 5 %, следовательно, швеллер № 18а подходит. Принимаем швеллер № 18а с $W_x = 132 \text{ см}^3$ и $A_{дв} = 22,2 \text{ см}^2$.

Площадь поперечного сечения двух швеллеров $A_{2шв} = 22,2 \cdot 2 = 44,4 \text{ см}^2$

Сравним принятые сечения балок по экономичности. Так как $A_{дв} < A_{2шв} < A_{кр}$, следовательно, двутавровое поперечное сечение балки наиболее экономичное.

РАСЧЕТ БАЛКИ-КОНСОЛИ НА ИЗГИБ

Для стальной балки требуется:

Для стальной балки, изображенной на рис. 8, требуется:

1. Построить эпюры поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_x .
2. Подобрать из условия прочности по допускаемым напряжениям сложное поперечное сечение балки.

Принять: $F = F_1$, $m = m_1$, $[\sigma] = 160$ МПа.

Расчет проведен для: $\ell_1 = 2$ м, $\ell_2 = 2,5$ м, $\ell_3 = 6,3$ м,

$F = F_1 = 10$ кН, $m = m_1 = 15$ кНм, $q = 14$ кНм.

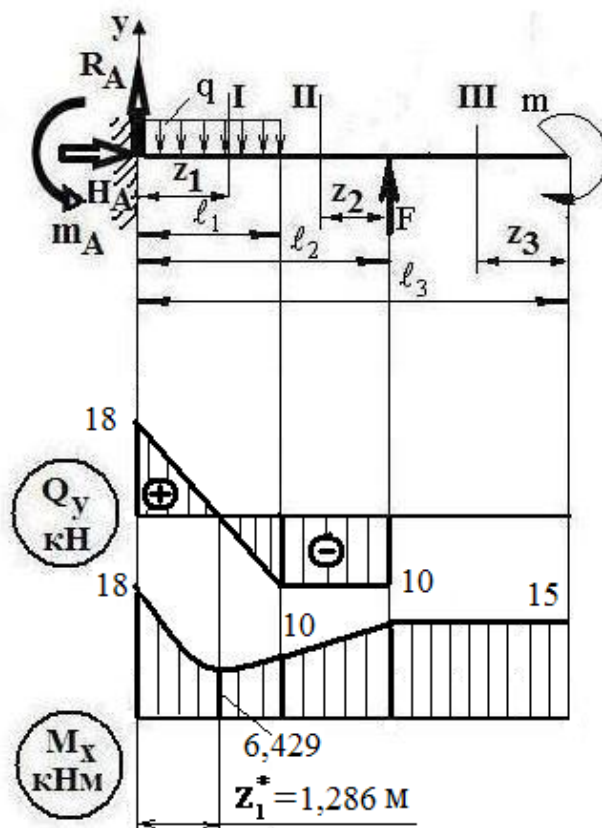


Рис. 10

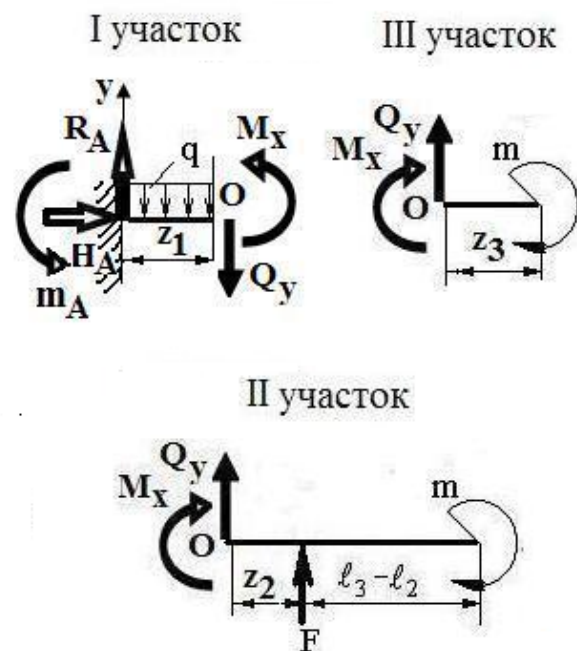


Рис. 11

Определим опорные реакции. В жестком защемлении А возникают три реакции – вертикальная R_A , горизонтальная H_A и момент m_A . Для определения трёх неизвестных реакций имеем три уравнения равновесия:
 $\sum F_z = 0$; $H_A = 0$.

$$\sum F_y = 0; R_A - q\ell_1 + F = 0;$$

$$R_A = q\ell_1 - F = 14 \cdot 2 - 10 = 18 \text{ кН.}$$

$$\sum m_A = 0; \quad m_A - q\ell_1 \cdot 0,5\ell_1 - m + F\ell_2 = 0.$$

$$m_A = q\ell_1 \cdot 0,5\ell_1 + m - F\ell_2 = 14 \cdot 2 \cdot 0,5 \cdot 2 + 15 - 10 \cdot 2,5 = 18 \text{ кНм.}$$

Для проверки правильности нахождения реакций используем уравнение

$$\sum m_B = 0. \quad m_A - R_A\ell_3 + q\ell_1 \cdot (\ell_3 - 0,5\ell_1) - F \cdot (\ell_3 - \ell_2) - m =$$

$$= 18 - 18 \cdot 6,3 + 14 \cdot 2 \cdot (6,3 - 0,5 \cdot 2) - 10 \cdot (6,3 - 2,5) - 15 = 0.$$

Опорные реакции найдены верно.

Разбиваем конструкцию балки на участки I, II, III и используем метод сечений.

Найдем значения поперечных сил $Q_Y(z)$ и изгибающих моментов $M_X(z)$ на участках балки и построим их эпюры.

Проводим сечение 1-1 в пределах участка I (см. рис 11). $0 \leq z_1 \leq \ell_1 = 2 \text{ м.}$

Отбрасываем правую часть балки и рассматриваем равновесие оставшейся левой части балки (см. рис 11).

$$\sum F_Y = 0 \quad R_A - qz_1 - Q_Y(z_1) = 0, \quad \text{откуда} \quad Q_Y(z_1) = R_A - qz_1.$$

$$Q_Y(0) = R_A = 18 \text{ кН.} \quad Q_Y(\ell_1) = Q_Y(2) = R_A - q \cdot 2 = 18 - 14 \cdot 2 = -10 \text{ кН.}$$

Строим эпюру $Q_Y(z_1)$ на участке I

$$\sum m_{o_1} = 0 \quad m_A + q z_1 \cdot 0,5z_1 - R_A z_1 + M_X(z_1) = 0,$$

$$\text{откуда} \quad M_X(z_1) = -m_A - q z_1 \cdot 0,5z_1 + R_A z_1 = -m_A - 0,5q z_1^2 + R_A z_1.$$

Это парабола, для построения которой необходимо иметь, как минимум, значения функции $M_X(z_1)$ в трёх точках (в двух граничных точках участка и в какой-либо третьей точке). Если эпюра Q_Y пересекает ось, как это имеет место на участке I, то в качестве третьей точки выбирается координата z_1^* сечения, в котором $M_X(z_1)$ имеет экстремум (так как $Q_Y(z_1)$ меняет знак с + на -, то это будет максимум). Координату z_1^* определим, приравняв выражение для $Q_Y(z_1)$ нулю при $z_1 = z_1^*$:

$$Q_Y(z_1) = R_A - qz_1^* = 0, \quad z_1^* = \frac{R_A}{q} = \frac{18}{14} = 1,286 \text{ м.}$$

Определяем значение $M_X(z_1)$ в двух граничных точках участка

$$M_X(0) = -m_A = -18 \text{ кНм.}$$

$$M_X(\ell_1) = M_X(2) = -m_A - 0,5 \cdot q \cdot 2^2 + R_A \cdot 2 = -18 - 0,5 \cdot 14 \cdot 2^2 + 18 \cdot 2 = -10 \text{ кНм.}$$

Определяем значение $M_X(z_1)$ в третьей точке при $z_1^* = 1,286 \text{ м}$

$$M_X(z_1 = 1,286 \text{ м}) = -18 + 18 \cdot 1,286 - 0,5 \cdot 14 \cdot 1,286^2 = -6,429 \text{ кНм.}$$

По найденным значениям $M_X(z_1)$ в трёх точках строим эпюру M_X на участке I (см. рис. 10).

Проводим сечение в пределах участка II, совместив начало отсчета с началом участка II. $0 \leq z_2 \leq \ell_2 - \ell_1 = 0,5 \text{ м.}$

Отбрасываем левую часть балки и рассматриваем равновесие оставшейся правой части балки (см. рис. 11).

$$\sum F_Y = 0 \quad F + Q_Y(z_2) = 0, \quad \text{откуда} \quad Q_Y(z_2) = -F = -10 \text{ кН}.$$

Строим эпюру $Q_Y(z_2)$ на участке II (см. рис. 10).

$$\sum m_{O_2} = 0. \quad Fz_2 - m - M_X(z_2) = 0, \quad \text{откуда} \quad M_X(z_2) = Fz_2 - m.$$

Определяем значение $M_X(z_2)$ в двух граничных точках участка

$$M_X(0) = -m = -10 \text{ кНм}. \quad M_X(0,5) = F \cdot 0,5 - m = 10 \cdot 0,5 - 15 = -10 \text{ кНм}.$$

Строим эпюру $M_X(z_2)$ на участке II (см. рис. 10).

Рассмотрим участок III $0 \leq z_3 \leq \ell_3 - \ell_2 = 3,8 \text{ м}.$

Отбрасываем левую часть балки и рассматриваем равновесие оставшейся правой части балки (см. рис. 11). $\sum F_Y = 0 \quad Q_Y(z_3) = 0.$

Строим эпюру Q_Y на участке III (см. рис. 10).

$$\sum m_{O_3} = 0 \quad -m - M_X(z_3) = 0, \quad \text{откуда} \quad M_X(z_3) = -m = -15 \text{ кНм}.$$

Строим эпюру M_X на участке III (см. рис. 10).

Подберем размеры сложного поперечного сечения в виде сложной фигуры. (рис. 12). Требуемый из условия прочности по нормальным напряжениям осевой момент сопротивления сечения балки находится по формуле (см. предыдущую задачу)

$$W_X^{TP} = \frac{|M_{X_{\max}}|}{[\sigma]} = \frac{18 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 112,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 112,5 \text{ см}^3.$$

Разобьем сложную фигуру на простейшие плоские фигуры – прямоугольник и два полуокруга, центры тяжести которых известны. Тогда J_X^{CP} – осевой момент инерции сложной фигуры

равен

$$J_X = J_X^{PP} + 2J_X^{ПОЛУКР} = \frac{bh^3}{12} + 2(0,11r^4 + \frac{\pi r^2}{2}(\frac{c}{2} + 0,424r)^2) =$$

$$= \frac{c^4}{12} + 2(0,11(\frac{c}{2})^4 + \frac{\pi}{2}(\frac{c}{2})^2(\frac{c}{2} + 0,424(\frac{c}{2}))^2) = 0,495c^4.$$

Здесь: $\frac{bh^3}{12} = \frac{cc^3}{12}$ – момент инерции прямоугольника относительно центральной оси всей фигуры X; $0,11r^4 = 0,11(0,5c)^4$ – момент инерции полуокруга относительно своей центральной оси X_1 (рис. 12,б); $\frac{c}{2} + 0,424r = \frac{c}{2} + 0,424(0,5c)$ – расстояние между центральной осью полуокруга X_1 и центральной осью X всей фигуры; $\frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi(0,5c)^2}{2}$ – площадь полуокруга.

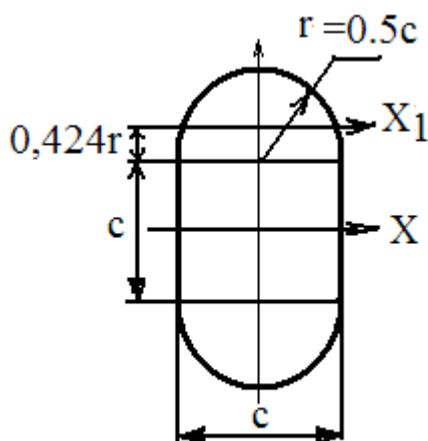


Рис. 12

Момент сопротивления сложной фигуры $W_x^{cl} = \frac{J_x^{cl}}{|y_{max}|} = \frac{0,495c^4}{c} = 0,495c^3$,

где $y_{max}=c$ – расстояние от нейтральной оси сложного сечения до самого удаленного волокна в сечении.

Приравняем $W_x^{TP} = W_x^{cl}$. $112,5 = 0,495c^3$, откуда $c = 6,103$ см.

РАСЧЕТ ПРОСТРАНСТВЕННО ЛОМАНОВОГО БРУСА

Для изображенного в аксонометрии ломаного стержня круглого поперечного сечения (рис. 13), расположенного в горизонтальной плоскости и имеющего прямые углы в точках А и В, на который действует вертикальная нагрузка F_1 и q , требуется:

- 1) построить отдельно (в аксонометрии) эпюры изгибающих и крутящих моментов;
- 2) установить опасное сечение и найти для него величину расчетного момента по энергетическому критерию.

Расчет проведен для: $\ell_1=1,4$ м, $\ell_2=2,3$ м, $F = F_1 = 10$ кН, $q = 14$ кН/м.

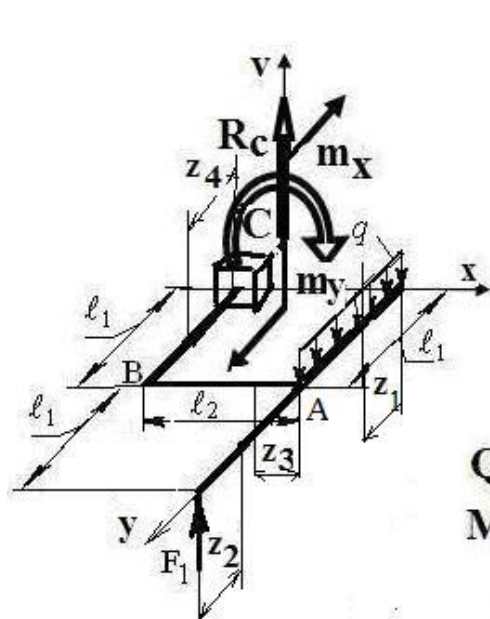


Рис. 13

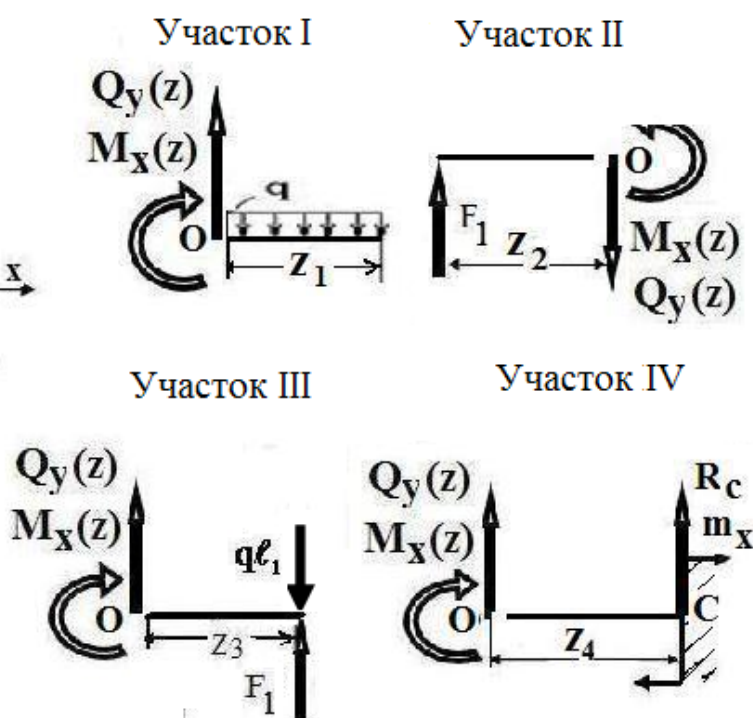


Рис. 14

Проведем произвольные оси X , Y и V .

Обозначим реакции В жесткой заделке - опоре С возникают три реакции: вертикальная реакция R_C , реактивный момент в плоскости VOX – m_Y и реактивный момент в плоскости VOY – m_X .

Для определения реакций в опоре С запишем уравнения равновесия статики.

$$\sum F_v = 0; \quad R_C - q \cdot \ell_1 + F_1 = 0, \quad \text{откуда } R_C = q \cdot \ell_1 - F_1 = 9,6 \text{ кН.}$$

$$\sum m_x = 0 \quad F_1 \cdot 2 \cdot \ell_1 - q \cdot \ell_1 \cdot 0,5 \cdot \ell_1 - m_x = 0,$$

откуда $m_x = -F_1 \cdot 2 \cdot \ell_1 + q \cdot \ell_1 \cdot 0,5 \cdot \ell_1 = -14,3 \text{ кНм.}$

$$\sum m_y = 0 \quad F_1 \cdot \ell_2 - q \cdot \ell_1 \cdot \ell_2 - m_y = 0, \quad \text{откуда } m_y = F_1 \cdot \ell_2 - q \cdot \ell_1 \cdot \ell_2 = -22,1 \text{ кНм.}$$

Делим стержень на участки и используем метод сечений.

Проводим сечение 1-1 в пределах участка I (рис. 14) $0 \leq z_1 \leq \ell_1$.

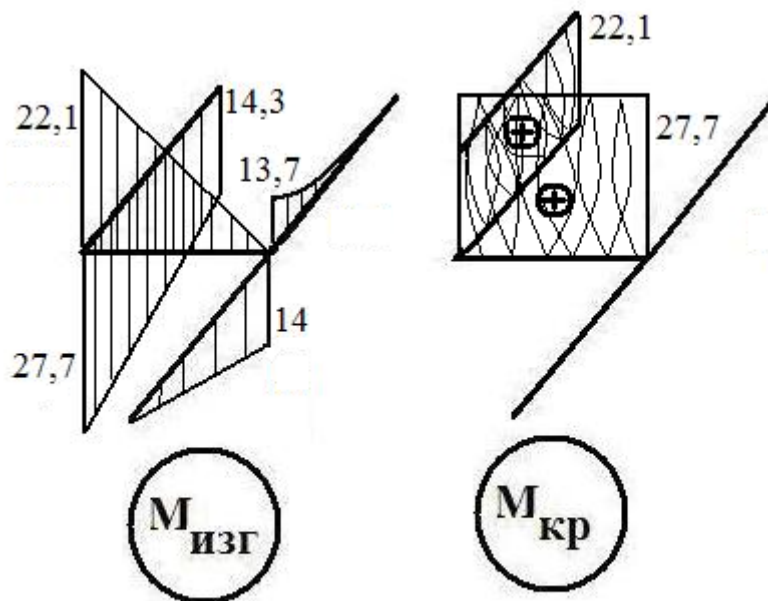


Рис. 15

Записываем уравнение равновесия статики

$$\sum m_{O_1} = 0$$

$$-qz_1 \cdot 0,5z_1 - M_x(z_1) = 0,$$

$$\text{откуда } M_x(z_1) = -0,5qz_1^2.$$

Находим значения момента на границах участка

$$M_x(0) = 0$$

$$M_x(\ell_1) = -13,7 \text{ кНм.}$$

Строим эпюру M_x на участке I.

Проводим сечение на участке II (рис. 14), совместив начало отсчета с началом участка II.

Участок II $0 \leq z_2 \leq \ell_1$. Записываем уравнение равновесия статики.

$$\sum m_{O_2} = 0 \quad -Fz_2 + M_x(z_2) = 0, \quad \text{откуда } M_x(z_2) = Fz_2.$$

Находим значения момента на границах участка

$$M_x(0) = 0. \quad M_x(\ell_1) = 14 \text{ кНм.}$$

Строим эпюру M_x на участке II.

Перенесем силы F_1 и $q\ell_1$ в точку А. Проводим сечение на участке III (рис. 14), совместив начало отсчета с началом участка III - точкой А.

Участок III $0 \leq z_3 \leq \ell_2$ Записываем уравнение равновесия статики

$$\sum m_{O_3} = 0 \quad Fz_3 - q\ell_1 z_3 - M_X(z_3) = 0, \quad \text{откуда} \quad M_X(z_3) = (F - q\ell_1) z_3.$$

Находим значения момента на границах участка

$$M_X(0) = 0. \quad M_X(\ell_2) = -22,08 \text{ кНм.}$$

Строим эпюру M_X на участке III.

Крутящий момент на участке III будет равен

$$M_K = m = F_1 \ell_1 + q \ell_1 0,5 \ell_1 = 27,7 \text{ кНм.}$$

Строим эпюру M_K на участке III.

Участок IV удобно рассматривать, совместив его начало с опорой С (рис. 14).

Участок IV $0 \leq z_4 \leq \ell_1$. Записываем уравнение равновесия статики.

$$\sum m_{O_4} = 0 \quad -m_X + R_C z_4 - M_X(z_4) = 0, \quad \text{откуда} \quad M_X(z_4) = -m_X + R_C z_4.$$

Находим значения момента на границах участка

$$M_X(0) = 14,3 \text{ кНм.} \quad M_X(\ell_1) = 27,7 \text{ кНм.}$$

Строим эпюру M_X на участке IV.

Крутящий момент на участке IV будет равен

$$M_K = -m_y = -F_1 \ell_2 + q \ell_1 \ell_2 = 22,1 \text{ кНм.}$$

Строим эпюру M_K на участке IV.

Анализируем построенные эпюры M_X и M_K .

Найдем опасное сечение стержня – такое, в котором значения изгибающего и крутящего моментов либо одновременно, либо по одиночке максимальны.

Это сечение - В.

Найдем для него величину расчетного момента по энергетическому критерию:

$$M_{\text{РАСЧ IV}} = \sqrt{M_X^2 + 0,75 \cdot M_K^2} = \sqrt{27,72^2 + 0,75 \cdot 22,08^2} = 33,676 \text{ кНм.}$$

РАСЧЕТ ВАЛА НА ИЗГИБ С КРУЧЕНИЕМ

Шкив диаметром D_1 и углом наклона ветвей ремня к оси x - α_1 делает n оборотов в минуту и передает мощность N кВт. Два других шкива имеют одинаковый диаметр D_2 и одинаковые углы наклона ветвей ремня к оси x - α_2 . Каждый из них передает мощность $N/2$ (рис. 16,а). Требуется:

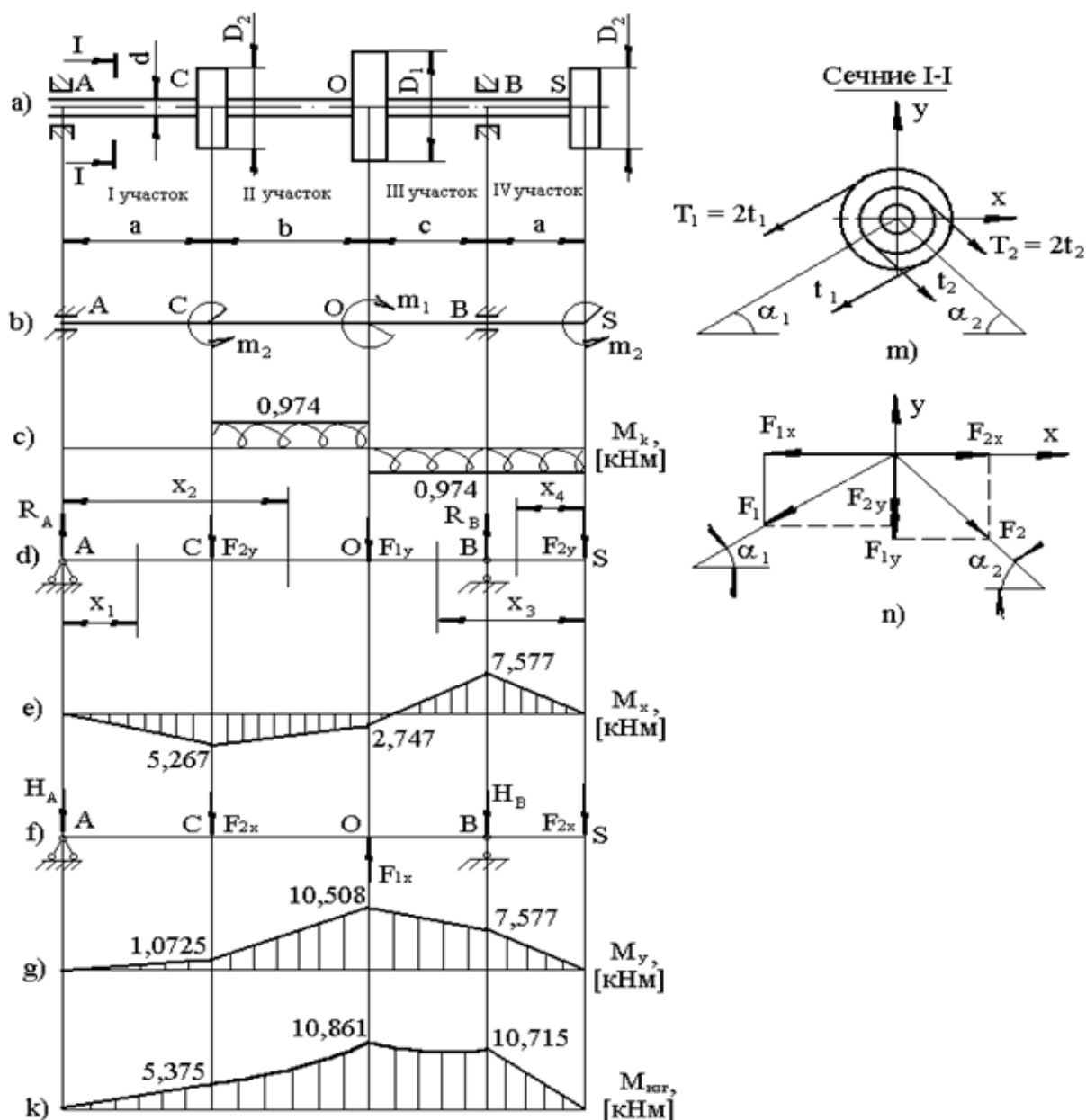


Рис. 16

- определить моменты, приложенные к шкивам, по заданным N и n ;
- построить эпюру крутящих моментов M_k ;
- определить окружные усилия t_1 и t_2 , действующие на шкивы, по найденным моментам и заданным диаметрам шкивов D_1 и D_2 ;
- определить давления на вал, принимая их равными трем окружным усилиям;
- определить силы, изгибающие вал в горизонтальной и вертикальной плоскостях (вес шкивов и вала не учитывать);
- построить эпюры моментов от вертикальных (M_x) и горизонтальных (M_y) сил;
- построить эпюру суммарных изгибающих моментов ($M_{изг}$);

- найти опасное сечение и определить максимальный расчетный момент по критерию наибольших касательных напряжений;

- подобрать диаметр вала d при заданном допускаемом напряжении $[\sigma]$.

Расчет проведен для: $N = 100$ кВт; $n = 500$ об/мин; $a = 1,1$ м; $b = 1,2$ м; $c = 1,3$ м; $D_1 = 1,0$ м; $D_2 = 0,6$ м; $\alpha_1 = 30^\circ$; $\alpha_2 = 45^\circ$; $[\sigma] = 70$ МПа.

1. Определяем моменты, приложенные к шкивам, по заданным N и n :

$$m_1 = 9,736 \frac{N}{n} = 9,736 \frac{100}{500} = 1,947 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$m_2 = 9,736 \frac{N}{2n} = 9,736 \frac{100}{2 \cdot 500} = 0,9736 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Расчетная схема вала на кручение изображена на рис. 2в.

2. Для построения эпюры крутящих моментов используем метод сечений.

Вал имеет четыре участка (рис. 16,а).

Для участка I: $M_{к1} = 0$.

Для участка II: $M_{к2} = m_2 = 0,974 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Для участков III и IV:

$$M_{к3} = M_{к4} = m_2 - m_1 = 0,974 - 1,947 = -0,974 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Эпюра крутящих моментов M_k приведена на рис. 16,с.

3. Определяем окружные усилия t_1 и t_2 , действующие на шкивы:

$$t_1 = \frac{2m_1}{D_1} = \frac{2 \cdot 1,947}{1} = 3,894 \text{ кН}; \quad t_2 = \frac{2m_2}{D_2} = \frac{2 \cdot 0,974}{0,6} = 3,247 \text{ кН}.$$

где D_1 и D_2 – диаметры первого и второго шкивов.

4. Находим давления на вал (принимая их равными трем окружным усилиям):

$$F_1 = 3t_1 = 3 \cdot 3,894 = 11,682 \text{ кН}; \quad F_2 = 3t_2 = 3 \cdot 3,247 = 9,741 \text{ кН}.$$

5. Определяем силы, изгибающие вал в горизонтальной и вертикальной плоскостях. Для этого разложим силы F_1 и F_2 на горизонтальную и вертикальную составляющие:

$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos \alpha_1 = 11,682 \cdot \cos 30^\circ = 10,117 \text{ кН};$$

$$F_{2x} = F_2 \cdot \cos \alpha_2 = 9,741 \cdot \cos 45^\circ = 6,888 \text{ кН};$$

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin \alpha_1 = 11,682 \cdot \sin 30^\circ = 5,841 \text{ кН};$$

$$F_{2y} = F_2 \cdot \sin \alpha_2 = 9,741 \cdot \sin 45^\circ = 6,888 \text{ кН}.$$

При этом нагрузки F_{1x} и F_{2x} направлены в противоположные стороны (см. рис. 16,н).

6. Прикладываем к валу силы F_{1y} и F_{2y} , изгибающие его в вертикальной плоскости (рис. 16,д), и находим опорные реакции R_A и R_B из уравнений равновесия статики:

$$\begin{aligned} \sum m_B = 0; \quad -R_A(a+b+c) + F_{2y}(b+c) + F_{1y} \cdot c - F_{2y} \cdot a &= 0; \\ -3,6R_A + 6,888 \cdot 2,5 + 5,841 \cdot 1,3 - 6,888 \cdot 1,1 &= 0; \quad R_A = 4,788 \text{ кН}. \end{aligned}$$

$$\sum m_A = 0; \quad -F_{2y}a - F_{1y}(a+b) + R_B(a+b+c) - F_{2y}(2a+b+c) = 0;$$

$$-6,888 \cdot 1,1 - 5,841 \cdot 2,3 + R_B \cdot 3,6 - 6,888 \cdot 4,7 = 0; \quad R_B = 14,829 \text{ кН.}$$

$$\text{Проверка: } \sum F_y = 0; \quad R_A + R_B - 2F_{2y} - F_{1y} = 0;$$

$$4,788 + 14,829 - 2 \cdot 6,888 - 5,841 = 0; \quad 0 \equiv 0.$$

Определяем изгибающие моменты от вертикальных сил.

$$\text{I участок } (0 \leq x_1 \leq 1,1 \text{ м}) \quad M_{x1} = R_A x_1 = 4,788 x_1;$$

$$x_1 = 0 \quad M_{x1} = 0; \quad x_1 = 1,1 \text{ м} \quad M_{x1} = 4,788 \cdot 1,1 = 5,267 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

$$\text{II участок } (1,1 \leq y_2 \leq 2,3 \text{ м})$$

$$M_{x2} = R_A x_2 - F_{2y}(x_2 - 1,1) = 4,788 x_2 - 6,888(x_2 - 1,1);$$

$$x_2 = 1,1 \text{ м} \quad M_{x2} = 5,267 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad x_2 = 2,3 \text{ м} \quad M_{x2} = 2,747 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

$$\text{III участок } (1,1 \leq y_3 \leq 2,4 \text{ м})$$

$$M_{x3} = -F_{2y} \cdot x_3 + R_B(x_3 - 1,1) = -6,888 x_3 + 14,829(x_3 - 1,1);$$

$$x_3 = 1,1 \text{ м} \quad M_{x3} = -7,577 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad x_3 = 2,4 \text{ м} \quad M_{x3} = 2,747 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

$$\text{IV участок } (0 \leq y_4 \leq 1,1 \text{ м}) \quad M_{x4} = -F_{2y} \cdot x_4 = -6,888 x_4;$$

$$x_4 = 0 \quad M_{x4} = 0; \quad x_4 = 1,1 \text{ м} \quad M_{x4} = -7,577 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Строим эпюру M_x ($M_{\text{верт}}$) (рис. 16,g).

7. Прикладываем к валу нагрузки F_{1x} и F_{2x} , изгибающие его в горизонтальной плоскости, при этом изображение вала с приложенными нагрузками поворачиваем из горизонтальной плоскости в вертикальную и располагаем в плоскости чертежа (рис. 16,f). Находим опорные реакции H_A и H_B из уравнений равновесия статики.

$$\sum m_B = 0; \quad H_A(a+b+c) + F_{2x}(b+c) - F_{1x} \cdot c - F_{2x} \cdot a = 0;$$

$$3,6H_A + 6,888 \cdot 2,5 - 10,117 \cdot 1,3 - 6,888 \cdot 1,1 = 0; \quad H_A = 0,975 \text{ кН.}$$

$$\sum m_A = 0; \quad -F_{2x}a + F_{1x}(a+b) - H_B(a+b+c) - F_{2x}(2a+b+c) = 0;$$

$$-6,888 \cdot 1,1 + 10,117 \cdot 2,3 - H_B \cdot 3,6 - 6,888 \cdot 4,7 = 0; \quad H_B = -4,634 \text{ кН.}$$

$$\text{Проверка: } \sum F_x = 0; \quad -H_A - H_B - 2F_{2x} + F_{1x} = 0;$$

$$-0,975 + 4,634 - 2 \cdot 6,888 + 10,117 = 0; \quad 0 \equiv 0.$$

Записываем выражения изгибающих моментов M_y ($M_{\text{гор}}$) на каждом участке:

$$\text{I участок } (0 \leq y_1 \leq 1,1 \text{ м}) \quad M_{y1} = -H_A y_1 = -0,975 y_1;$$

$$y_1 = 0 \quad M_{y1} = 0; \quad y_1 = 1,1 \text{ м} \quad M_{y1} = -0,975 \cdot 1,1 = -1,0725 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

$$\text{II участок } (1,1 \leq y_2 \leq 2,3 \text{ м})$$

$$M_{y2} = -H_A y_2 - F_{2x}(y_2 - 1,1) = -0,975 y_2 - 6,888(y_2 - 1,1);$$

$$y_2 = 1,1 \text{ м} \quad M_{y2} = -1,0725 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad y_2 = 2,3 \text{ м} \quad M_{y2} = -10,508 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

$$\text{III участок } (1,1 \leq y_3 \leq 2,4 \text{ м})$$

$$M_{y3} = -F_{2x} \cdot y_3 - H_B(y_3 - 1,1) = -6,888 y_3 + 4,634(y_3 - 1,1);$$

$$y_3 = 1,1 \text{ м} \quad M_{y3} = -7,577 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad y_3 = 2,4 \text{ м} \quad M_{y3} = -10,508 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$\text{IV участок} \quad (0 \leq y_4 \leq 1,1 \text{ м}) \quad M_{y4} = -F_{2x} \cdot y_4 = -6,888 y_4;$$

$$y_4 = 0 \quad M_{y4} = 0; \quad y_4 = 1,1 \text{ м} \quad M_{y4} = -7,577 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Строим эпюру M_y ($M_{\text{гор}}$) (рис. 16,г).

8. Определяем суммарные изгибающие моменты в граничных сечениях участков по формуле $M_{\text{изг}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$.

$$M_{\text{изг}}(A) = 0;$$

$$M_{\text{изг}}(C) = \sqrt{5,267^2 + (-1,073)^2} = 5,375 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{\text{изг}}(O) = \sqrt{2,747^2 + (-10,508)^2} = 10,861 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{\text{изг}}(B) = \sqrt{-7,577^2 + (-7,577)^2} = 10,715 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{\text{изг}}(S) = 0;$$

Строим эпюру суммарных изгибающих моментов $M_{\text{изг}}$ (рис. 16,к).

Для каждого поперечного сечения вала имеется своя плоскость действия суммарного изгибающего момента, но для круглого сечения можно совместить плоскости $M_{\text{изг}}$ для всех поперечных сечений и построить суммарную эпюру в плоскости чертежа. Эта эпюра будет прямолинейной только для тех участков, на которых эпюры M_x и M_y пересекают ось в одной точке (I и IV участки). На других участках эпюра $M_{\text{изг}}$ будет криволинейной.

9. Опасным сечением является сечение O.

Расчетный момент по третьей теории прочности для этого сечения

$$M_{\text{расч.мах}} = \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + M_K^2} = \sqrt{10,861^2 + 0,974^2} = 10,904 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

10. Определяем диаметр вала d из условия прочности:

$$\frac{M_{\text{расч.мах}}}{W_x} \leq [\sigma]; \quad W_x = \frac{\pi d^3}{32}; \quad \frac{10,904 \cdot 32}{3,14 d^3} \leq 70 \cdot 10^3;$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{10,904 \cdot 32}{3,14 \cdot 70 \cdot 10^3}} = 0,117 \text{ м}.$$

Округляя, принимаем диаметр вала $d = 120 \text{ мм}$.

РАСЧЕТ СТЕРЖНЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

Стальной стержень (рис. 17,а) длиной $\ell = 0,84 \text{ м}$ сжимается силой $F = 140 \text{ кН}$. Требуется:

- определить размеры поперечного сечения (рис. 17,б) стержня при допуске напряжении на простое сжатие $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$;
- найти критическую силу и коэффициент запаса устойчивости.

1. Определяем геометрические характеристики поперечного сечения стержня.

Площадь $A = A_{\text{КВАДРАТА}} - 2A_{\text{КРУГА}} = 3c \times 3c - 2 \frac{\pi c^2}{4} = 7,43c^2$, откуда $c = \sqrt{\frac{A}{7,43}}$.

Главные центральные моменты инерции поперечного сечения стержня

$$J_X = J_X^{\text{КВ}} - 2J_X^{\text{КР}} = \frac{bh^3}{12} - 2\left(0,05d^4 + \frac{\pi d^2}{4}(0,75c)^2\right) = \frac{3c(3c)^3}{12} - 2\left(0,05c^4 + \frac{\pi}{4}c^2(0,5625c^2)\right) = 5,7669c^4$$

$$J_Y = J_Y^{\text{КВ}} - 2J_Y^{\text{КРУГА}} = \frac{b^3h}{12} - 2 \frac{\pi d^4}{64} = 6,75c^4 - 2 \times 0,05c^4 = 6,65c^4.$$

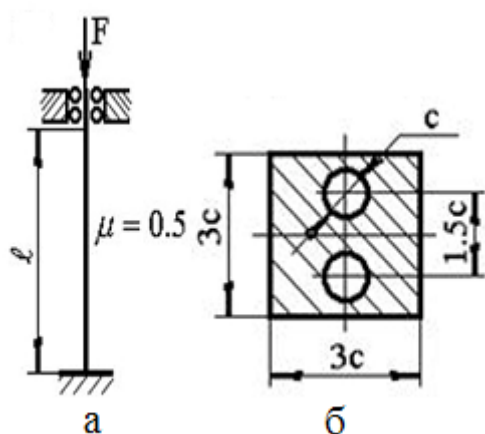


Рис. 17

Минимальный главный центральный момент инерции $J_{\text{MIN}} = J_X = 5,7669c^4$.

Минимальный радиус инерции

$$i_{\text{MIN}} = \sqrt{\frac{J_{\text{MIN}}}{A}} = \sqrt{\frac{5,7669c^4}{7,43c^2}} = 0,881c.$$

Гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\text{min}}} = \frac{0,5 \cdot 84}{0,881 \cdot c} = \frac{47,7}{c},$$

здесь $\mu=0,5$ - коэффициент приведения длины для данного стержня.

2. Подбор поперечного сечения стержня проводим последовательными приближениями.

Первое приближение. В первом приближении задаем $\varphi_1 = 0,5$.

$$\text{Площадь сечения } A_1 = \frac{F}{\varphi_1[\sigma]} = \frac{140 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 1,75 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 17,5 \text{ см}^2$$

$$\text{Находим } c_1 = \sqrt{\frac{A_1}{7,43}} = \sqrt{\frac{17,5}{7,43}} = 1,53 \text{ см}. \text{ Гибкость } \lambda_1 = \frac{47,7}{c} = \frac{47,7}{1,53} = 31.$$

Представим число $\lambda_1 = 31$ как $30+1$. По таблице коэффициентов продольного изгиба φ для стали марки Ст.3 в приложении к учебному пособию по «Сопротивлению материалов» <http://techn.sstu.ru/new/SubjectFGOS/Default.aspx?kod=115&tip=4> находим $\varphi_1^{\text{табл}}$, соответствующее гибкости $\lambda_1 = 31$.

$$\text{при } \lambda = 30 \quad \varphi = 0,94$$

$$\text{при } \lambda = 40 \quad \varphi = 0,92$$

$$\Delta\lambda = 10 \quad \Delta\varphi = -0,02$$

$$\text{Для } \Delta\lambda = 1 \quad \Delta\varphi = -0,002$$

$$\text{Тогда } \varphi_1^{\text{табл}}(\lambda = 31) = \varphi(\lambda = 30) + (31 - 30) \cdot \Delta\varphi = 0,94 + 1 \cdot (-0,002) = 0,938$$

Напряжения, действующие в стержне $\sigma = \frac{F}{A_1} = \frac{140 \cdot 10^3}{1,75 \cdot 10^{-3}} = 80 \cdot 10^6 \text{ Па} = 80 \text{ МПа}$.

Допускаемое напряжение на устойчивость

$$[\sigma_y] = \varphi_1^{\text{табл}} [\sigma] = 0,938 \cdot 160 = 150,06 \text{ МПа}$$

Разница в процентах между действующим напряжением σ и допускаемым напряжением на устойчивость $[\sigma]$

$$\frac{|\sigma - [\sigma_y]|}{[\sigma_y]} \cdot 100\% = \frac{80 - 150,06}{150,06} 100\% = 46,68\%.$$

Так как 46,68% больше допустимых 5 %, то проводим следующее приближение.

Второе приближение. В качестве начального значения φ_2 для второго при-

ближения принимается $\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1^{\text{табл}}}{2} = \frac{0,5 + 0,938}{2} = 0,719$

Площадь сечения $A_2 = \frac{F}{\varphi_2 [\sigma]} = \frac{140 \cdot 10^3}{0,719 \cdot 160 \cdot 10^6} = 1,217 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 12,17 \text{ см}^2$

Находим $c_2 = \sqrt{\frac{A_2}{7,43}} = \sqrt{\frac{12,17}{7,43}} = 1,28 \text{ см}$. Гибкость $\lambda_2 = \frac{47,7}{c} = \frac{47,7}{1,28} = 37,25 \approx 37$.

Представим число $\lambda_2 = 37$ как 30+7. По таблице коэффициентов продольного изгиба φ для стали марки Ст.3 (см. приложения к учебному пособию по «Сопротивлению материалов») находим $\varphi_2^{\text{табл}}$, соответствующее гибкости $\lambda_2 = 37$.

при $\lambda = 30$ $\varphi = 0,94$

при $\lambda = 40$ $\varphi = 0,92$

$\Delta\lambda = 10$ $\Delta\varphi = -0,02$

Для $\Delta\lambda = 1$ $\Delta\varphi = -0,002$

Тогда $\varphi_2^{\text{табл}} (\lambda = 37) = \varphi (\lambda = 30) + (37 - 30) \cdot \Delta\varphi = 0,94 + 7 \cdot (-0,002) = 0,926$

Напряжения, действующие в стержне

$$\sigma = \frac{F}{A_2} = \frac{140 \cdot 10^3}{1,217 \cdot 10^{-3}} = 115 \cdot 10^6 \text{ Па} = 115 \text{ МПа}.$$

Допускаемое напряжение на устойчивость

$$[\sigma_y] = \varphi_2^{\text{табл}} [\sigma] = 0,926 \cdot 160 = 148 \text{ МПа}$$

Разница в процентах между действующим напряжением σ и допускаемым напряжением на устойчивость $[\sigma]$

$$\frac{|\sigma - [\sigma_y]|}{[\sigma_y]} \cdot 100\% = \frac{115 - 148}{148} 100\% = 22,31\%.$$

Так как 22,31% больше допустимых 5 %, то проводим следующее приближение.

Третье приближение. В качестве начального значения φ_3 для третьего приближения принимается $\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi_2^{\text{табл}}}{2} = \frac{0,719 + 0,926}{2} = 0,822$

$$\text{Площадь сечения } A_3 = \frac{F}{\varphi_3[\sigma]} = \frac{140 \cdot 10^3}{0,822 \cdot 160 \cdot 10^6} = 1,064 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 10,64 \text{ см}^2$$

$$\text{Находим } c_3 = \sqrt{\frac{A_3}{7,43}} = \sqrt{\frac{10,64}{7,43}} = 1,197 \text{ см}.$$

$$\text{Гибкость } \lambda_3 = \frac{47,7}{c} = \frac{47,7}{1,197} = 39,83 \approx 40.$$

По таблице коэффициентов продольного изгиба φ для стали марки Ст.3 (см. приложения к учебному пособию по «Сопротивлению материалов») находим $\varphi_3^{\text{табл}} = 0,92$, соответствующее гибкости $\lambda_2 = 40$.

Напряжения, действующие в стержне

$$\sigma = \frac{F}{A_3} = \frac{140 \cdot 10^3}{1,064 \cdot 10^{-3}} = 131,56 \cdot 10^6 \text{ Па} = 131,56 \text{ МПа}.$$

$$\text{Допускаемое напряжение на устойчивость } [\sigma_y] = \varphi_3^{\text{табл}} [\sigma] = 0,92 \cdot 160 = 147,2 \text{ МПа}$$

Разница в процентах между действующим напряжением σ и допускаемым напряжением на устойчивость $[\sigma]$

$$\frac{|\sigma - [\sigma_y]|}{[\sigma_y]} \cdot 100\% = \frac{131,56 - 147,2}{147,2} \cdot 100\% = 10,66\%.$$

Так как 10,66% больше допустимых 5 %, то проводим следующее приближение.

Четвертое приближение. В качестве начального значения φ_4 для четвертого приближения принимается $\varphi_4 = \frac{\varphi_3 + \varphi_3^{\text{табл}}}{2} = \frac{0,822 + 0,92}{2} = 0,871$

$$\text{Площадь сечения } A_4 = \frac{F}{\varphi_4[\sigma]} = \frac{140 \cdot 10^3}{0,871 \cdot 160 \cdot 10^6} = 1,004 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 10,04 \text{ см}^2$$

$$\text{Находим } c_4 = \sqrt{\frac{A_4}{7,43}} = \sqrt{\frac{10,04}{7,43}} = 1,16 \text{ см}. \text{ Гибкость } \lambda_4 = \frac{47,7}{c} = \frac{47,7}{1,16} = 41.$$

Представим число $\lambda_4 = 41$ как $40+1$. По таблице коэффициентов продольного изгиба φ для стали марки Ст.3 (см. приложения к учебному пособию по «Сопротивлению материалов») находим $\varphi_4^{\text{табл}}$, соответствующее гибкости $\lambda_4 = 41$.

при $\lambda = 40$ $\varphi = 0,92$

при $\lambda = 50$ $\varphi = 0,89$

$$\Delta\lambda = 10 \quad \Delta\varphi = -0,03$$

$$\text{Для } \Delta\lambda = 1 \quad \Delta\varphi = -0,003$$

$$\text{Тогда } \varphi_4^{\text{табл}}(\lambda = 41) = \varphi(\lambda = 40) + (41 - 40) \cdot \Delta\varphi = 0,92 + 1 \cdot (-0,003) = 0,917$$

Напряжения, действующие в стержне

$$\sigma = \frac{F}{A_4} = \frac{140 \cdot 10^3}{1,004 \cdot 10^{-3}} = 139,4 \cdot 10^6 \text{ Па} = 139,4 \text{ МПа}.$$

Допускаемое напряжение на устойчивость

$$[\sigma_y] = \varphi_4^{\text{табл}} [\sigma] = 0,917 \cdot 160 = 146,72 \text{ МПа}$$

Разница в процентах между действующим напряжением σ и допускаемым напряжением на устойчивость $[\sigma]$

$$\frac{|\sigma - [\sigma_y]|}{[\sigma_y]} \cdot 100 \% = \frac{139,4 - 146,72}{146,72} 100\% = 4,98\%.$$

Полученная разница 4,98 % менее 5 % допустимых, следовательно принимаем $s = s_4 = 1,16 \text{ см}$.

3. Определяем критическую силу F_k .

Если $\lambda < \lambda_{\text{пред}}$, то для определения критической силы используется формула Ясинского $F_{\text{кр}} = A \cdot (a - b \cdot \lambda)$, (для стали марки Ст.3 $a = 310 \text{ МПа}$, $b = 1,14 \text{ МПа}$), а если $\lambda > \lambda_{\text{пред}}$, то формула Эйлера $F_k = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu \ell)^2}$. Для стали марки Ст.3 величина гибкости $\lambda_{\text{пред}} = 100$.

Так как гибкость стержня в последнем приближении $\lambda = 41 < \lambda_{\text{пред}}$, то критическую силу определяем по формуле Ясинского

$$F_{\text{кр}} = A \cdot (a - b \cdot \lambda) = 10,04 \cdot 10^{-4} (310 \cdot 10^6 - 1,14 \cdot 10^6 \cdot 41) = 2643 \cdot 10^2 \text{ Н} = 264,3 \text{ кН}$$

$$\text{Коэффициент запаса устойчивости } n_y = \frac{F_k}{F} = \frac{264,3}{140} = 1,89$$

РАСЧЕТ НА УДАР

На балку, выполненную из двутавра № 30 ГОСТ 8239-89, свободно лежащую на двух жестких опорах (рис. 18,а), с высоты $h = 8 \text{ см}$ падает груз весом $Q = 1,1 \text{ кН}$. Длина пролета балки $\ell = 2,9 \text{ м}$. Требуется:

- 1) найти наибольшее нормальное напряжение в балке;
- 2) решить аналогичную задачу при условии, что правая опора заменена пружиной, податливость которой равна $\alpha = 0,02 \text{ м/кН}$;
- 3) сравнить полученные результаты.

1. Из таблицы сортамента прокатной стали в приложении к учебному пособию по «Сопротивлению материалов» <http://techn.sstu.ru/new/SubjectFGOS/Default.aspx?kod=115&tip=4> выписываем для двутавра № 30 значения осевого момента сопротивления $W_x = 472 \text{ см}^3$ и осевого момента инерции $J_x = 7080 \text{ см}^4$.

2. Наибольшее динамическое нормальное напряжение, МПа, возникающее в балке от действия ударной нагрузки $\sigma_{\text{д max}} = K_{\text{д}} \cdot \sigma_{\text{ст max}}$,

где: $K_{\text{д}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{\Delta_{\text{ст}}}}$ – динамический коэффициент;

$\sigma_{\text{ст max}} = \frac{|M_{\text{max}}|}{W_x}$ – наибольшее статическое нормальное напряжение, возникающее в балке от действия статической нагрузки;

h – высота падения груза;

$\Delta_{\text{ст}}$ – статический прогиб сечения балки в точке удара;

M_{max} – максимальный изгибающий момент в опасном сечении балки, возникающий от действия статической нагрузки;

W_x – осевой момент сопротивления поперечного сечения балки.

Для определения $\Delta_{\text{ст}}$ в сечении С балки используем интеграл Мора

$$\Delta_{\text{ст}} = \Delta_{1F} = \sum_{i=1}^n \frac{M_{xF} \bar{M}_{x1}}{EJ_x} dz,$$

где M_{xF} – грузовой изгибающий момент, возникающий от действия статической нагрузки;

$\bar{M}_{x1}$ – единичный изгибающий момент, возникающий от действия единичной нагрузки.

Для определения $\bar{M}_{x1}$ к балке (рис. 18,б) в точке удара (в точке С) и по направлению удара прикладываем единичную фиктивную силу $\bar{F}_1 = 1$. Определяем опорные реакции R_A и R_B :

$$\sum M_A = 0; \quad -R_B \ell - \bar{F} \cdot \left(\ell + \frac{\ell}{4} \right) = 0, \quad R_B = \frac{5}{4}.$$

$$\sum M_B = 0; \quad -R_A \ell - \bar{F} \cdot \frac{\ell}{4} = 0, \quad R_A = -\frac{1}{4}.$$

$$\text{Проверка: } \sum Y = 0; \quad R_A + R_B - \bar{F} = -\frac{1}{4} + \frac{5}{4} - 1 = 0.$$

Опорные реакции найдены верно.

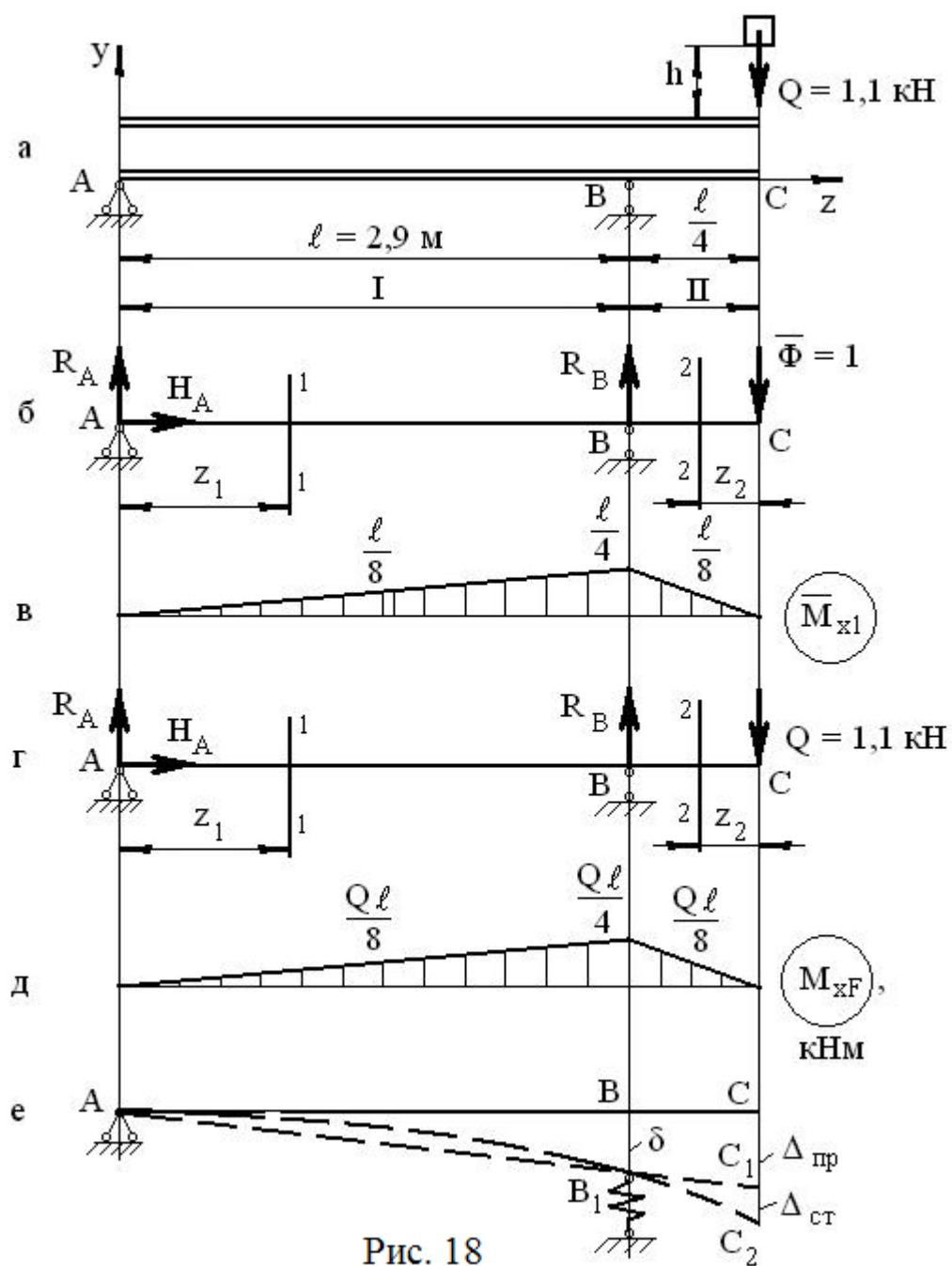


Рис. 18

Разбиваем балку на два участка и используем метод сечений.

Участок AC (рис. 19,а): $0 \leq z_1 \leq \ell$;

$$\sum M_{O_1} = 0; \quad M_x(z_1) - R_A \cdot z_1 = 0; \quad M_x(z_1) = R_A \cdot z_1 = -\frac{z_1}{4};$$

$$\text{при } z_1 = 0 \quad M_x(z_1) = 0;$$

$$\text{при } z_1 = \ell \quad M_x(z_1) = -\frac{\ell}{4}.$$

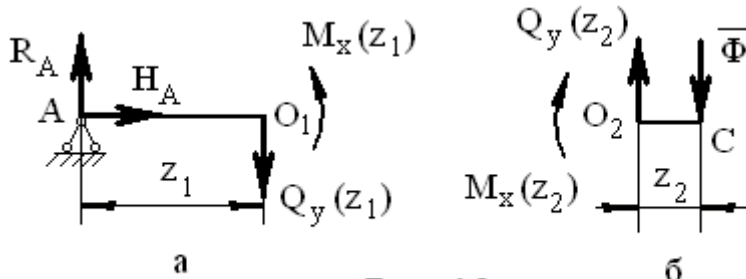


Рис. 19

Участок CB

$$(\text{рис. 19,б}): \quad 0 \leq z_2 \leq \frac{\ell}{4};$$

$$\sum M_{O_2} = 0;$$

$$-M_x(z_1) - \bar{\Phi} \cdot z_2 = 0;$$

$$M_x(z_1) = -\bar{\Phi} \cdot z_2 = -z_2; \quad \text{при } z_2 = 0 \quad M_x(z_2) = 0; \quad \text{при } z_2 = \frac{\ell}{4} \quad M_x(z_2) = -\frac{\ell}{4}.$$

Эпюра $\bar{M}_{x1}$ изображена на рис. 18,в.

Для определения M_{xF} к балке (рис. 18,г) в точке С прикладываем вектор статической нагрузки Q.

$$\text{Опорные реакции будут равны: } R_A = \frac{Q}{4}; \quad R_B = \frac{5Q}{4}.$$

Грузовая эпюра M_{xF} (рис. 18,д) по форме будет точно такой же как и $\bar{M}_{x1}$, но все ее значения будут в Q раз больше.

Вычисляем интеграл Мора способом Симпсона:

$$\begin{aligned} \Delta_{ст} = \Delta_{IF} &= \sum_{i=1}^n \frac{M_{xF} \bar{M}_{x1}}{EJ_x} dz = \\ &= \frac{\ell}{6EJ_x} \cdot \left(4 \cdot \frac{\ell}{8} \cdot \frac{Q\ell}{8} + \frac{\ell}{4} \cdot \frac{Q\ell}{4} \right) + \frac{\ell}{4 \cdot 6EJ_x} \cdot \left(\frac{\ell}{4} \cdot \frac{Q\ell}{4} + 4 \cdot \frac{\ell}{8} \cdot \frac{Q\ell}{8} \right) = \\ &= \frac{Q\ell^3}{48EJ_x} + \frac{Q\ell^3}{192EJ_x} = \frac{5 \cdot Q\ell^3}{192 \cdot EJ_x} = \frac{5 \cdot 1,1 \cdot 10^3 \cdot 2,9^3}{192 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 7080 \cdot 10^{-8}} = 4,93 \cdot 10^{-5} \text{ м.} \end{aligned}$$

Находим динамический коэффициент:

$$K_D = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{\Delta_{ст}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 8 \cdot 10^{-2}}{4,93 \cdot 10^{-5}}} = 57,98.$$

Из грузовой эпюры M_{xF} (рис. 18,д) видно, что опасным будет сечение В, в котором действует максимальный изгибающий момент, вызывающий максимальные статические напряжения, равные

$$\sigma_{ст \max} = \frac{|M_{\max}|}{W_x} = \frac{Q\ell}{4W_x} = \frac{1,1 \cdot 10^3 \cdot 2,9}{4 \cdot 472 \cdot 10^{-6}} = 1,69 \cdot 10^6 \text{ Па} = 1,69 \text{ МПа}.$$

В этом же сечении возникают максимальные динамические напряжения

$$\sigma_{Д \max} = K_D \cdot \sigma_{ст \max} = 57,98 \cdot 1,69 = 97,99 \text{ МПа.}$$

2. Заменим правую опору В пружиной (рис. 18,е), податливость которой равна α . Податливость – это осадка пружины от груза, равного 1 кН.

От действия статической нагрузки Q пружина сожмется на величину δ , называемую осадкой пружины. При этом балка повернется относительно точки А и прогнется.

$$\text{Осадка пружины равна } \delta = R_B \cdot \alpha = \frac{5Q}{4} \cdot \alpha = \frac{5 \cdot 1,1}{4} \cdot 0,02 = 0,0275 \text{ м.}$$

Полное статическое перемещение $\Delta_{\text{ст}}$ сечения С балки будет складываться из статического перемещения сечения С балки от ее изгиба $\Delta_{\text{ст}}$, найденного выше, и перемещения сечения С от сжатия пружины – $\Delta_{\text{пр}}$.

Из подобия треугольников ABV_1 и ACC_1 находим:

$$\frac{\delta}{\Delta_{\text{пр}}} = \frac{AB}{AC}; \quad \frac{\delta}{\Delta_{\text{пр}}} = \frac{\ell}{\frac{5\ell}{4}}; \quad \Delta_{\text{пр}} = \frac{5\delta}{4} = \frac{5 \cdot 0,0275}{4} = 3,4375 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Тогда полное статическое перемещение сечения С балки:

$$\Delta_{\text{ст}} = \Delta_{\text{ст}} + \Delta_{\text{пр}} = 4,93 \cdot 10^{-5} + 3,4375 \cdot 10^{-2} = 3,4424 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Динамический коэффициент в этом случае равен:

$$K_D = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{\Delta_{\text{ст}}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 8 \cdot 10^{-2}}{3,4424 \cdot 10^{-2}}} = 3,3765.$$

Максимальное динамическое напряжение в балке с пружиной:

$$\sigma_{D \max} = K_D \cdot \sigma_{\text{ст max}} = 3,3765 \cdot 1,69 = 5,71 \text{ МПа.}$$

3. Сравним максимальные динамические напряжения в балке на жестких опорах и в балке с пружиной. В балке на жестких опорах максимальные динамические напряжения больше, чем в балке с пружиной в

$$\frac{97,99}{5,71} = 17,16 \text{ раз.}$$

РАСЧЕТ НА КОЛЕБАНИЯ

На двух балках, выполненных из двутавра № 24а, установлен двигатель весом $Q = 19 \text{ кН}$ (рис. 20,а), делающий $n = 700 \text{ об/мин}$. Длина пролета балки $\ell = 1,7 \text{ м}$. Центробежная сила инерции, возникающая вследствие неуравновешенности вращающихся частей двигателя, равна $H = 7 \text{ кН}$. Собственный вес балок и силы сопротивления можно не учитывать. Модуль упругости материала балок $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

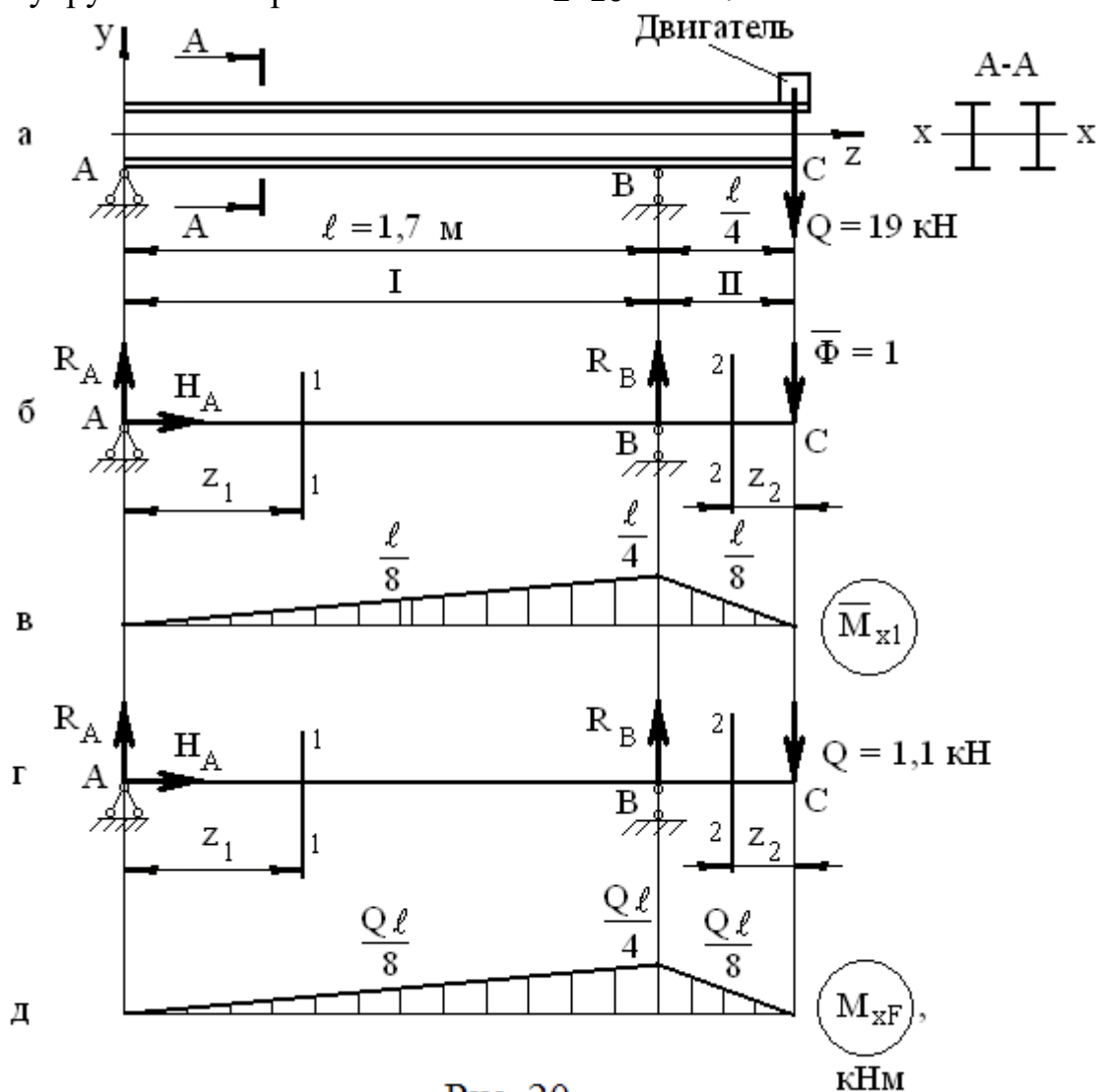


Рис. 20

Требуется:

- 1) определить частоту собственных колебаний балок $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{\text{ст}}}}$,

где g – ускорение силы тяжести;

$\Delta_{\text{ст}}$ – статический прогиб балки, в точке приложения нагрузки Q .

- 2) определить частоту изменения возмущающей силы $\omega = \frac{\pi n}{30}$;

3) найти коэффициент нарастания колебаний по формуле $\beta = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$. Если коэффициент β , определяемый по этой формуле, окажется отрицательным, то в дальнейшем расчете следует учитывать его абсолютную величину;

4) найти динамический коэффициент по формуле $K_d = 1 + \frac{H}{Q}\beta$.

5) определить наибольшее динамическое нормальное напряжение в балках σ_d ;

6) проверить прочность балок по допускаемому напряжению $[\sigma] = 125 \text{ МПа}$.

Из таблицы сортамента прокатной стали в приложении к учебному пособию по «Сопротивлению материалов» <http://techn.sstu.ru/new/SubjectFGOS/Default.aspx?kod=115&tip=4> выписываем для двутавра № 24а значения осевого момента сопротивления $W_x = 317 \text{ см}^3$ и осевого момента инерции $J_x = 3800 \text{ см}^4$.

Величину прогиба Δ_{ct} как и предыдущей задаче находим с помощью интеграла Мора и способа Симпсона. Для этого построим эпюры изгибающих моментов от единичной нагрузки $\bar{M}_{x1}$ (рис. 20,в) и от заданной нагрузки $Q - M_{xF}$ (рис. 20,д). Расчет изгибающих моментов и построение эпюр ведем аналогично расчету, показанному в предыдущей задаче.

Интеграл Мора будет равен:

$$\begin{aligned} \Delta_{ct} = \Delta_{1F} &= \sum_{i=1}^n \frac{M_{xF} \bar{M}_{x1}}{E \cdot 2J_x} dz = \\ &= \frac{\ell}{6E \cdot 2J_x} \cdot \left(4 \cdot \frac{\ell}{8} \cdot \frac{Q\ell}{8} + \frac{\ell}{4} \cdot \frac{Q\ell}{4} \right) + \frac{\ell}{4 \cdot 6E \cdot 2J_x} \cdot \left(\frac{\ell}{4} \cdot \frac{Q\ell}{4} + 4 \cdot \frac{\ell}{8} \cdot \frac{Q\ell}{8} \right) = \\ &= \frac{Q\ell^3}{48E \cdot 2J_x} + \frac{Q\ell^3}{192E \cdot 2J_x} = \frac{5 \cdot Q\ell^3}{192 \cdot E \cdot 2J_x} = \\ &= \frac{5 \cdot 19 \cdot 10^3 \cdot 1,7^3}{192 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 3800 \cdot 10^{-8}} = 1,5993 \cdot 10^{-4} \text{ м}. \end{aligned}$$

Тогда частота собственных колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{ct}}} = \sqrt{\frac{9,81}{1,5993 \cdot 10^{-4}}} = 247,67 \text{ с}^{-1}.$$

Круговая частота ω вынужденных колебаний равна угловой скорости вращения ротора двигателя

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{3,14 \cdot 700}{30} = 73,27 \text{ с}^{-1}.$$

Критическая угловая скорость вращения вала двигателя, при которой может возникнуть резонанс

$$n = \frac{30 \cdot \omega_0}{\pi} = \frac{30 \cdot 247,67}{3,14} = 2366 \text{ об/мин.}$$

Коэффициент нарастания колебаний $\beta = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{73,27}{247,67}\right)^2} = 1,096$

Динамический коэффициент $K_d = 1 + \frac{H}{Q}\beta = 1 + \frac{7}{19} \cdot 1,096 = 1,4$

Из грузовой эпюры M_{XF} (рис. 20,д) видно, что опасным будет сечение В, в котором действует максимальный изгибающий момент, вызывающий максимальные статические напряжения

$$\sigma_{\text{ст max}} = \frac{|M_{\text{max}}|}{2W_x} = \frac{Q\ell}{4 \cdot 2W_x} = \frac{19 \cdot 10^3 \cdot 1,7}{4 \cdot 2 \cdot 317 \cdot 10^{-6}} = 12,74 \cdot 10^6 \text{ Па} = 12,74 \text{ МПа}.$$

В этом же сечении возникают максимальные динамические напряжения $\sigma_{\text{д max}} = K_d \cdot \sigma_{\text{ст max}} = 1,4 \cdot 12,74 = 17,84 \text{ МПа}.$

Проверяем прочность балок по динамическому напряжению

$$\sigma_{\text{д max}} = 17,84 \text{ МПа} < [\sigma] = 125 \text{ МПа}.$$

Следовательно, балка удовлетворяет условию прочности.

**Тихонов Денис Александрович
Гильман Александр Абрамович**

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ
ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ**
Методические указания к решению задач

Ответственный за выпуск Тихонов Д.А.
Оригинал-макет Тихонов Д.А.

413100, Россия, Саратовская область, г. Энгельс, пл. Свободы, 17

ЭТИ (филиал) СГТУ имени Гагарина Ю.А.

Регистрационный номер 26.